Л.М.АЛЬПИН, Д.С.ДАЕВ, А.Д.КАРИНСКИЙ

ТЕОРИЯ ПОЛЕЙ, ПРИМЕНЯЕМЫХ В РАЗВЕДОЧНОЙ ГЕОФИЗИКЕ

ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Часть II.

Глава вторая.

Статическое поле в вакууме.

Глава третья.

Статическое поле в присутствии среды.

Л.М.АЛЬПИН, Д.С.ДАЕВ, А.Д.КАРИНСКИЙ

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГЕОЛОГОРАЗВЕДОЧНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени Серго Орджоникидзе

(МГРИ)

Л. М. АЛЬПИН, Д. С. ДАЕВ, А. Д. КАРИНСКИЙ

ТЕОРИЯ ПОЛЕЙ, ПРИМЕНЯЕМЫХ В РАЗВЕДОЧНОЙ ГЕОФИЗИКЕ

Было допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебника для студентов вузов, обучающихся по специальности «Геофизические методы поисков и разведки месторождений полезных ископаемых»

Часть II.

Глава вторая. ***Статическое поле в вакууме.***

Глава третья. ***Статическое поле в присутствии среды.***

УДК 550.83.01(0.75)

Альпин Л. М., **Даев Д. С.,** **Каринский А. Д.** Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. Учебник для вузов. – М.: Недра, 1985. – 407 с.

Изложена теория полей: гравитационного; электростатического и магнитостатического в вакууме и в поляризующейся (намагничивающейся) среде; стационарных электрического и магнитного; переменного электромагнитного; рассмотрены элементы теории упругости; распространение электромагнитных и упругих колебаний в среде; способы расчёта полей и их зависимости от среды.
Для студентов геофизических специальностей геологоразведочных вузов и факультетов.

Р е ц е н з е н т ы:
1. Кафедра геофизики МГУ.
2. Д-р техн. наук *Б. С. Светов (ИЗМИРАН)*.

2020,. 111 с.

Учебник "Теория полей, применяемых в разведочной геофизике", отражавший, в то время, взгляды научной школы геофизического факультета МГРИ, был выпущен издательством "Недра" в 1985 году.

По мнению одного из авторов подготовка в настоящее время электронной версии Учебника даёт возможность дополнить книгу несколькими важными, особенно для студентов, разделами и значительно увеличить число иллюстраций. Есть надежда, что удастся подготовить в виде отдельных pdf – файлов следующие пять частей электронной версии Учебника. Часть I: "Введение. Поле"; часть II: "Статические поля в вакууме и в присутствии среды"; часть III: "Стационарные электрическое и магнитное поля"; часть IV: "Переменное электромагнитное поле"; часть V: "Элементы теории упругости и теории распространения упругих колебаний".

В этом разделе электронной версии Учебника представлена

часть II.

Глава вторая. Статическое поле в вакууме.
Глава третья. Статическое поле в присутствии среды.

Иллюстраций 29, список литературы – 25 названий.

http-адрес **части I**:
http://magnetometry.ru/files/Alpin_uch_vol1_2019.pdf.
В части I - разделы: "Предисловие", "Введение", глава первая "Поле".

Электронная версия части II Учебника подготовлена А. Д. Каринским

Москва, 2020 г.

Оглавление

Список обозначений к главам второй, третьей

$\mathbf{1}_l$, $\mathbf{1}_x$, $\mathbf{1}_1$,...- безразмерные единичные векторы (орты) по направлениям l, X, l_1...;
a- точка наблюдения;
B- вектор магнитной индукции с абсолютной величиной B;
dl- бесконечно малый отрезок линии l;
$\mathbf{dl}=\mathbf{1}_l \cdot dl$- ориентированный элементарный отрезок длиной dl;

$dm=\delta \cdot dV$, $\sigma \cdot dS$, $\lambda \cdot dl$- бесконечно-малая масса (заряд);
dS- бесконечно малая площадка или элемент поверхности S;
$\mathbf{dS}=\mathbf{1}_n \cdot dS$- ориентированная элементарная площадка с нормалью n и с площадью dS;
dV- бесконечно малый объём или элемент области V пространства;
$d\omega$- бесконечно малый угол видимости площадки **dS**;
$d\Omega$- бесконечно малый телесный угол;
D- вектор электрического смещения (индукции) с абсолютной величиной D;
e- электрический заряд;
E- напряжённость электрического поля с абсолютной величиной E;
$\mathcal{E}$- напряжение векторного поля;
f- статическое поле (создаваемое массами, зарядами) с абсолютной величиной f;
$f_l, f_x, f_1,...$- скалярные компоненты векторов **f** по направлениям l, X, l_1,...;
$\mathbf{f}_l=\mathbf{1}_l \cdot f_l$, $\mathbf{f}_x=\mathbf{1}_x \cdot f_x$, $\mathbf{f}_1=\mathbf{1}_1 \cdot f_1,...$- векторные компоненты векторов **f** по направлениям l, X, l_1...;
g^f- точки обрыва векторных линий l_f;
h- высота, толщина, коэффициент Ламэ;
H- напряжённость магнитного поля с абсолютной величиной H;
J- вектор намагниченности;
$\mathbf{J}^{вр}$- вектор вр***е***менной (индуктивной) намагниченности;
$\mathbf{J}^0$ - вектор постоянной (остаточной) намагниченности;
l- линия, длина;
l_f- векторная линия поля **f**;
$l[S]$- замкнутая линия (контур), ограничивающая поверхность S;
$\mathbf{L}$, $\mathbf{L}_{12}$, $\mathbf{L}_{qa}$ - радиус-векторы с равными расстояниям абсолютными величинами L, L_{12}, L_{qa};
m- масса, заряд;
M - момент с абсолютной величиной M;
n- нормаль к поверхности S;
$\mathbf{n}=\mathbf{1}_n$- безразмерный единичный вектор по направлению нормали n;
o- точка, центр;
O- начало координат;
p- точка на поверхности S;
p- момент диполя с абсолютной величиной p;
P- вектор поляризации;
q- точка (в частности, в источнике поля);
r- цилиндрическая координата;
R- сферическая координата;
S- поверхность, площадь;
$S[V]$- замкнутая поверхность, ограничивающая область пространства V;
S^f- поверхности, ортогональные векторным линиям l_f;
t- тангенциальное (касательное к поверхности) направление, время;
$\mathbf{t}=\mathbf{1}_t$- безразмерный единичный вектор по направлению t;
U- (скалярный) потенциал;
V- область пространства, объём;

x, y, z- декартовы координаты;
X, Y, Z- оси координат;
γ (гамма)- гравитационная постоянная: $\gamma\approx 6.6743\cdot 10^{-11}$, $м^3/(кг\cdot с^2)$;
δ (дельта)- объёмная плотность масс, зарядов;
$\delta_Д$- дельта-функция Дир***а***ка;
$1+\chi=\varepsilon$ (эпсилон)- диэлектрическая проницаемость;
$\varepsilon_0\approx 10^{-9}/(36\cdot\pi)$, Ф/м $\approx 8.8542\cdot 10^{-12}$, Ф/м- электрическая постоянная;
$\varepsilon\cdot\varepsilon_0=\varepsilon_a$- абсолютная диэлектрическая проницаемость;
η, η_{12} (эта)- поверхностная плотность дипольных моментов;
θ (тета)- сферическая координата;
Θ (тета прописн***а***я)- область пространства;
æ (каппа)- магнитная восприимчивость;
λ (лямбда)- линейная плотность масс, зарядов;
Λ (лямбда прописн***а***я)- в главе третьей параметр среды;
$1+$æ$=\mu$ (мю)- магнитная проницаемость;
$\mu_0=4\pi\cdot 10^{-7}$, Гн/м- магнитная постоянная;
$\mu\cdot\mu_0=\mu_a$- абсолютная магнитная проницаемость;
ν (ню)- множитель пропорциональности в законе Кулона - Ньютона;
ξ (кси)- координата в произвольной системе координат;
π (пи)$\approx$3.14159265358979323846264338327950288419716939937510...;
σ (сигма)- поверхностная плотность масс, зарядов;
τ (тау)- тангенциальное (касательное к поверхности) направление,
в индексах - полная тангенциальная компонента вектора;
$\boldsymbol{\tau}=\mathbf{1}_\tau$- безразмерный единичный вектор по направлению τ;
φ (фи)- цилиндрическая или сферическая (азимутальная) координата;
χ (хи)- диэлектрическая восприимчивость;
ψ (пси)- поток вектора;
ω (омега)- угол видимости;
Ω (омега прописн***а***я)- телесный угол;
$\mathbf{\Gamma}$- напряжённость гравитационного поля с абсолютной величиной Γ;
$П$- плоскость;
ф- "фиксированная" точка с известным потенциалом;
V- знак "или", служащий в конце главы второй и в главе третьей для разделения величин, либо математически идентичных выражений, относящихся к электростатическому **V** магнитостатическому полю.

Глава вторая. Статическое поле в вакууме

Практически имеется в виду поле в пространстве, заполненном телами, не влияющими на рассматриваемое поле. Например, для гравитационного поля это любые тела, а для магнитного поля – все тела, кроме магнетиков. Но выражения, получаемые для поля в вакууме, принципиально применимы также в присутствии тел, влияющих на поле; надо только учесть дополнительные возбудители поля, носителями которых являются эти тела. Основой теории поля в пространстве, заполненном любыми телами, является теория поля в вакууме.

Статическое поле - постоянное поле, источники которого неподвижны. В данном случае, употребляя термин "в вакууме", будем подразумевать отсутствие среды - таких тел (объектов), которые оказывают влияние на поле, а сами по себе (в отсутствие поля) эти тела могут поля не создавать. При рассмотрении масс, зарядов и их поля будем, как правило, применять "макроскопический" подход, отвлекаясь от атомарно – молекулярного строения вещества. При этом физически реальной массой будет "сплошная", объёмная масса с конечной объёмной плотностью δ.

§ 1. МАССЫ

Будем рассматривать массы m, взаимодействующие по закону обратной пропорциональности квадрату расстояния: гравитационные по закону Ньютона, электрические (заряды) и магнитные – по законам Кулона.

В геофизической литературе принято магнитные заряды, как и источники гравитационного поля, называть массами. Для общности изложения здесь это название часто применяется сугубо условно также для источников электрического поля.

Практически мы непосредственно наблюдаем не заряды, а заряженные тела, но это не должно нам мешать рассматривать электричество в отдельности. Можно представить себе заряды, сплошь занимающие объёмы или образующие тонкие (но, всё же, объёмные) слои на поверхностях тел, отвлекаясь от существования самих тел и от атомистической структуры электричества, неощутимой при макроскопическом изучении электрических явлений.

Аналогично электрическим зарядам мы можем представить себе магнитные массы, вводимые как понятие физически фиктивное, но удобное при изучении закономерностей взаимодействия намагниченных тел. Взаимодействие магнитов (магнитных стрелок) или электромагнитов происходит так, как если бы каждый из них был носителем «магнитных зарядов» разного знака, взаимодействующих по закону обратной пропорциональности квадрату расстояния. С наибольшей конкретностью мы воспринимаем понятие гравитационной массы. Тяжесть тела мы непосредственно ощущаем, и гравитационную массу тела, пропорциональную его весу, мы ассоциируем с его веществом. Но при изучении сил взаимодействия по закону Ньютона мы можем отвлечься от всех свойств тел, кроме их способности взаимно притягиваться.

В дальнейшем изложении, говоря о массах, будем иметь в виду массы любого из трёх указанных видов:

$$m = m_{\text{гр}},\ m_{\text{эл}},\ m_{\text{магн}}, \tag{2.1}$$

где $m_{\text{гр}}$ – гравитационная масса; $m_{\text{эл}}$ – электрический заряд (количество электричества); $m_{\text{магн}}$ – магнитная масса. Но все массы, о которых идёт речь в одной формуле или в одном контексте, следует считать *одной* (какой-либо) *природы*. Исключение имеем в разделе I, § 7 третьей главы.

I. Объёмные массы

Условимся считать, что реальные массы являются объёмными (рис. 2.1, *а*), т. е. они заполняют непрерывно области пространства V с некоторой объёмной плотностью

$$\delta = dm/dV. \tag{2.2}$$

Величина δ является функцией положения точки, её координат. Значение δ в какой-либо точке характеризует массу в достаточно малой окрестности этой точки. Согласно (2.2) массу m, находящуюся в области V, определяют формулы

$$m = \int_V \delta\, dV, \qquad m = \delta \cdot V \ \text{при} \ \operatorname{grad}\delta = \nabla\delta = 0. \tag{2.3}$$

Формула $(2.3)_2$ соответствует случаю, когда в области V масса однородна, т. е. когда во всех точках области V функция δ имеет одно и то же значение.

Будем считать функцию δ ограниченной за исключением отдельных мест (точек, линий, поверхностей) нахождения вводимых ниже необъёмных масс с плотностью δ, формально считаемой бесконечно большой; функция δ может терпеть конечные разрывы на отдельных поверхностях и, в частности, на границах объёмных масс. *Кусочно-однородной* называют массу, если её плотность δ меняется (разрывно) только на поверхностях, разграничивающих её части.

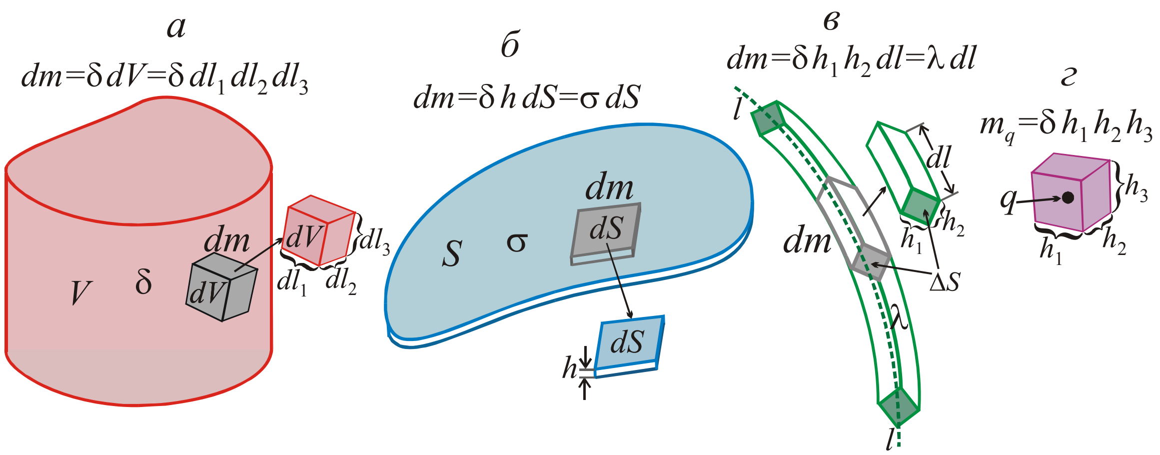

Рис. 2.1.

Массы: объёмная (*а*), поверхностная (*б*), линейная (*в*), точечная (*г*)

Масса (и её плотность) может быть положительной или отрицательной за исключением гравитационной массы, которая всегда положительна. Иногда рассматривают формально вводимые отрицательные гравитационные массы. Положительную магнитную массу часто называют северной, а отрицательную – южной. Равенство нулю плотности δ в какой-либо точке q означает, что заключённая в элементе объёма dV, содержащем эту точку, масса $dm = \delta \cdot dV = 0$, т. е. что в этом элементе объёма массы нет. Но это не всегда следует понимать буквально, так как элемент объёма может содержать две одинаковые по абсолютной величине массы (заряда) разного знака:

$$dm^+ = \delta^+ \cdot dV, \quad dm^- = -\delta^- \cdot dV, \tag{2.3'}$$

где δ^+ и δ^- – абсолютные величины объёмных плотностей положительной и отрицательной масс. Плотность δ представляет собой алгебраическую сумму плотностей δ^+ и $-\delta^-$ положительных и отрицательных масс:

$$\delta = \delta^+ - \delta^-, \quad \delta > 0 \text{ при } \delta^+ > \delta^- \text{ и } \delta < 0 \text{ при } \delta^+ < \delta^-. \tag{2.4}$$

II. Необъёмные массы

Введём в рассмотрение необъёмные массы (рис. 2.1, *б, в, г*) как понятия, имеющие (в силу принятого условия) формальный характер, но удобные при некоторых расчётах.

При достаточно малых геометрических размерах объёмной массы m результаты интересующих нас расчётов, например по формуле $(2.15)_2$ (см. раздел III § 2), не меняются при любых изменениях формы массы, её геометрических размеров и плотности, если остаётся постоянной величина m. При этих условиях для удобства расчётов мысленно сжимают массу, т. е. уменьшают её геометрические размеры, соответственно увеличивая её плотность δ так, чтобы величина m оставалась неизменной, и в пределе, когда область V, занимаемая массой, стягивается к некоторой точке q, получают вместо объёмной массы m точечную массу m_q, такой же величины.

Если расстояние L_{qa} от расположенной внутри массы m точки q до точки наблюдения a много больше максимального линейного размера h массы m ($L_{qa} >> h$), то поле, создаваемое в точке a массой m, практически не зависит от формы и размеров массы m, распределения объёмной плотности δ в этой массе. Это поле будут определять положение в пространстве точки q и величина массы m. Тогда (например, при расчётах поля этой массы) будет проще абстрагироваться от тех характеристик массы, которые не оказывают существенного влияния на поле в точке a и ввести понятие "точечная масса". Для этого принимают допущение, что при неизменной величине массы m её линейные размеры $h \to 0$, и, соответственно, объёмная плотность $\delta \to \infty$ как $(1/h^3)$. Тогда, вместо объёмной массы m, в точке q будет расположена точечная масса $m_q = m$, конечная по величине, но имеющая бесконечно малые размеры (рис. 2.2, *а*).

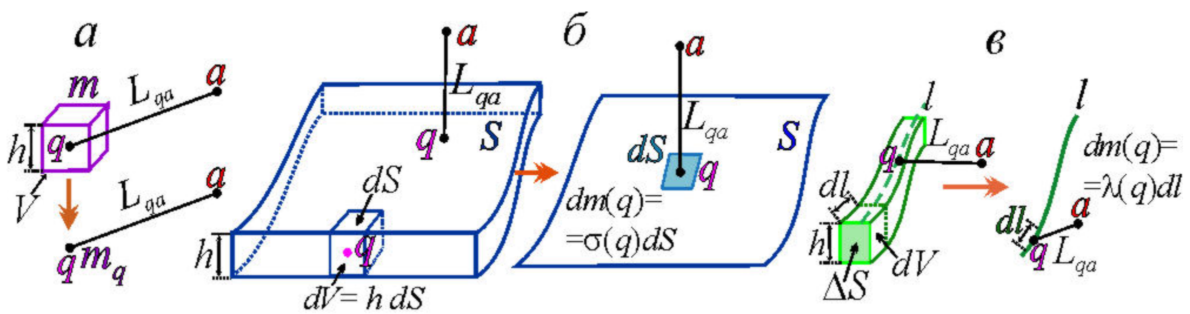

Рис. 2.2.

Переход от объёмных масс к необъёмным: точечной (*а*),
поверхностной (*б*), линейной (*в*)

Практически точечная масса представляет собой массу конечной величины, но очень малых геометрических размеров. Сжимая массу m, мы неограниченно увеличиваем её плотность δ. Если, например, придать области V форму куба с ребром h и считать массу m однородной, то будем иметь: $V=h^3$, $m=h^3\cdot\delta$. Полагая $V\to 0$, имеем $h\to 0$ и, следовательно, считая m конечной величиной, получаем

$$\delta\to\infty,\ \text{как}\ h^{-3}\ \text{при}\ h\to 0. \tag{2.5}$$

Представим себе массу, имеющую форму слоя с малой толщиной h (рис. 2.1, *б* и рис. 2.2, *б*) и с объёмной плотностью δ. Выделим мысленно площадку dS поверхности слоя и расположенный против этой площадки элемент слоя с объёмом $h\cdot dS$ в пределах которого будем считать массу однородной. Масса элемента слоя $dm=\delta\cdot h\cdot dS$, а эта же масса, рассчитанная на единицу занимаемой ею площади, – двухмерная плотность слоя

$$\sigma=dm/dS=h\cdot\delta. \tag{2.6}$$

При достаточно малой толщине h слоя результаты интересующих нас расчётов обычно зависят только от общей массы dm элемента слоя, поэтому мысленно сжимают слой, т. е. уменьшают его толщину h, соответственно увеличивая его плотность δ так, чтобы масса dm сохранялась без изменения. В пределе при $h\to 0$ получают вместо объёмной массы *поверхностную массу* с *поверхностной плотностью* σ, определяемой по формуле (2.6). Поверхностная плотность σ представляет собой массу элемента поверхности, отнесённую к его площади (рис. 2.1, *б* и рис. 2.2, *б*). Сжимая слой до нулевой толщины, мы неограниченно увеличиваем его объёмную плотность δ. Согласно (2.6) $\delta=\sigma/h$ и, следовательно, считая σ конечной величиной, имеем

$$\delta\to\infty,\ \text{как}\ h^{-1}\ \text{при}\ h\to 0. \tag{2.5'}$$

Величина σ может быть функцией координат ξ_1, ξ_2 системы, взятой на поверхности S. Величину m поверхностной массы определяет формула

$$m=\int_S \sigma\, dS\,. \tag{2.3''}$$

Если плотность σ не меняется на поверхности S, т. е. если двухмерный градиент $\operatorname{grad}^S\sigma=0$ (см. раздел III § 4 главы первой, выражение (1.41)), то имеем однородную поверхностную массу $m=\sigma\cdot S$.

Рассмотрим ещё нитевидную массу с объёмной плотностью δ и с площадью поперечного сечения ΔS (рис. 2.1, *в* и рис. 2.2, *в*). Мысленно уменьшая поперечное сечение нити и соответственно увеличивая её плотность δ так, чтобы масса $dm=\Delta S\cdot dl\cdot\delta$ элемента dl длины l нити оставалась без изменения, получаем в пределе при $\Delta S\to 0$ *линейную массу* с *линейной плотностью*

$$\lambda=dm/dl=\Delta S\cdot\delta. \tag{2.6'}$$

При этом объёмная плотность δ становится бесконечно большой. Полагая, что поперечное сечение нити является квадратом со стороной h, получаем $\Delta S=h^2$ и, следовательно,

$$\delta\to\infty,\ \text{как}\ h^{-2}\ \text{при}\ h\to 0. \tag{2.5''}$$

Линейная плотность λ в общем случае является функцией координаты ξ, отсчитываемой вдоль линейной массы, т. е. $\lambda=\lambda(\xi)$. Величину m линейной массы определяет формула

$$m=\int\limits_{l}\lambda\,dl\,. \qquad (2.3''')$$

Если плотность λ не меняется вдоль линии l, т. е. если производная $d\lambda/d\xi=0$, то имеем однородную линейную массу $m=\lambda\cdot l$.

Переход от объёмных масс к точечным, поверхностным и линейным массам, не занимающим объёмов, упрощает наши расчёты, но вместе с тем допущение нереальной (по нашему условию) массы с бесконечно большой объёмной плотностью δ может привести к некоторым столь же нереальным следствиям (см. раздел I, § 7). Необъёмные массы определяются в пространстве точками q, линиями l и поверхностями S, по которым они распределены, величинами m_q точечных масс и функциями $\sigma(\xi_1, \xi_2)$ и $\lambda(\xi)$ координат на поверхностях S и линиях l. Величины m_q, σ и λ, как и величина δ, определяют массы, остающиеся не нейтрализованными, и поэтому аналогично (2.4) имеем

$$m_q=m^+{}_q-m^-{}_q, \quad \sigma=\sigma^+-\sigma^-, \quad \lambda=\lambda^+-\lambda^-. \qquad (2.4')$$

где $m^+{}_q$ и $m^-{}_q$, σ^+ и σ^-, λ^+ и λ^- – величины, аналогичные δ^+ и δ^-.

Элементы dm объёмных, поверхностных и линейных масс, равные $\delta\cdot dV$, $\sigma\cdot dS$ и $\lambda\cdot dl$, при расчётах часто заменяют мысленно точечными массами, учитывая малость линейных размеров элементов dV, dS и dl, содержащих эти массы. Однако надо иметь в виду различие между элементарной массой и точечной массой. *Элементарная масса* является бесконечно малой величиной (не только геометрически, но и как масса), а точечная масса, имея нулевые геометрические размеры, не является бесконечно малой величиной. Элементарная масса отличается от точечной массы также порядком величины объёмной плотности δ.

III. Замечания

1. Согласно сказанному выше заданием функций $\delta(q)$, $\sigma(q)$, $\lambda(q)$, значений m_q, поверхностей S и линий l, на которых расположены поверхностные и линейные массы, и точек q, в которых находятся точечные массы, определяется поле масс. Имея в виду, что необъёмные массы фактически представляют собой сильно уплотненные объёмные массы, можно сказать, что массы, находящиеся в пространстве, определяются функцией $\delta(q)$. Эта функция точки q образует некоторое скалярное *поле* δ, в котором могут быть особые точки, линии и поверхности, т. е. места, в которых $\delta\to\infty$ (точечные, линейные и поверхностные массы), а также поверхности конечного разрыва (границы масс) и области, в которых $\delta=0$. Это поле можно называть полем масс. Но так называют поле, создаваемое массами (см. § 2), поэтому вместо «поля масс» в указанном выше смысле мы обычно будем говорить «совокупность масс», а также «распределение масс», имея в виду совокупность масс и их распределение в пространстве, т. е, поле

$\delta(q)$ с его особыми точками, линиями и поверхностями, в которых их распределение в пространстве характеризуют величины m_q, $\lambda(q)$, $\sigma(q)$. Симметрия масс есть симметрия этого поля.

2. Введенные согласно (2.1) для масс индексы «гр», «эл», «магн» относятся также к другим величинам, определяющим массы, например δ, σ, λ. Но эти индексы будем опускать там, где без них можно понять, о массах какой природы идёт речь.

3. Совокупность масс в области V является нейтральной, если сумма масс, находящихся в этой области, равна нулю.

4. Совокупность масс в общем случае может меняться со временем. В частности, плотность δ может быть функцией (положения) точки и времени, т. е. четырёх аргументов x, y, z, t. Здесь и в следующих трёх главах будем предполагать, что совокупность масс во всём пространстве является постоянной, т. е. не меняется со временем. Это означает, что производные по времени t от плотностей масс и от величин точечных масс равны нулю:

$$\partial\delta/\partial t=0,\quad \partial\sigma/\partial t=0,\quad \partial\lambda/\partial t=0,\quad dm_q/dt=0, \tag{2.7}$$

а точки, линии и поверхности, по которым распределены массы, фиксированы в пространстве. Только по мере необходимости мы будем в этих главах затрагивать общий случай, когда массы меняются со временем. Но постоянство совокупности масс не исключает их движения. Так, например, для того чтобы в некоторой точке q выполнялось условие $\partial\delta/\partial t=0$, достаточно, чтобы масса $\delta{\cdot}dV$, находящаяся в элементе объёма dV, содержащем эту точку, не менялась со временем. Для этого требуется только, чтобы прибывающая в элемент объёма dV в течение любого промежутка времени масса (заряд) была равна массе, убывающей из него за этот же промежуток времени. Но в главах второй и третьей будем предполагать, что массы находятся в статическом состоянии, т. е. что движения масс нет.

5. Вместо магнитных масс иногда говорят о магнитных полюсах. Поверхностные и линейные магнитные массы называют полюсными поверхностями и линиями, а точечную магнитную массу – точечным полюсом или просто полюсом.

6. Области, поверхности, линии, занятые электрическими объёмными, поверхностными, линейными массами (зарядами), называют заряженными, а если эти массы однородны – равномерно заряженными.

§ 2. ПОЛЯ КУЛОНОВЫХ И НЬЮТОНИАНСКИХ СИЛ

I. Взаимодействие точечных масс

Согласно законам Кулона и Ньютона точечная масса m_1, находящаяся в точке 1, действует на точечную массу m_2, находящуюся в точке 2, с силой

$$\mathbf{F}_{12}=\nu\cdot\frac{m_1\cdot m_2}{L_{12}^2}\cdot\frac{\mathbf{L}_{12}}{L_{12}}=\nu\cdot\frac{m_1\cdot m_2}{L_{12}^2}\cdot\mathbf{1}_{\mathbf{L}_{12}}=\nu\cdot\frac{m_1\cdot m_2}{L_{12}^3}\cdot\mathbf{L}_{12}, \tag{2.8}$$

пропорциональной массам m_1 и m_2, обратно пропорциональной квадрату расстояния L_{12} между ними и направленной по линии, соединяющей эти массы (рис. 2.3).

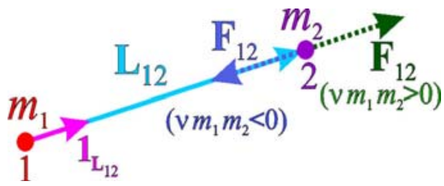

Рис. 2.3.
К закону Кулона-Ньютона для точечных масс

В (2.8), конечно, массы m_1 и m_2 имеют одинаковую природу.

Множитель пропорциональности ν, определяющийся выбором единиц измерения величин, входящих в равенство (2.8), различен для масс различной природы. В СИ для гравитационных, электрических и магнитных масс имеем соответственно

$$\nu = -\gamma, \qquad \nu = 1/4\pi\varepsilon_0, \qquad \nu = \mu_0/4\pi, \tag{2.9}$$

$$\gamma \approx \frac{6.67}{10^{11}}\,\frac{\text{м}^3}{\text{кг}\cdot\text{с}^2}, \quad \varepsilon_0 \approx \frac{10^{-9}}{36\pi}\,\frac{\text{Ф}}{\text{м}}, \quad \mu_0 = \frac{4\pi}{10^7}\,\frac{\text{Гн}}{\text{м}}, \tag{2.9'}$$

где γ, ε_0, μ_0 – постоянные: гравитационная, электрическая, магнитная. Направление силы $\mathbf{F}_{12}$ совпадает с направлением вектора $\mathbf{L}_{12}$ при $\nu\cdot m_1\cdot m_2>0$ и вектора $\mathbf{L}_{21}=-\mathbf{L}_{12}$ при $\nu\cdot m_1\cdot m_2<0$ (рис. 2.3). Первый случай (отталкивание) соответствует взаимодействию одноимённых электрических или магнитных масс, а второй (притяжение) – взаимодействию гравитационных масс, а также разноимённых электрических или магнитных масс. Масса m_2 действует на массу m_1 силой $\mathbf{F}_{21}=-\mathbf{F}_{12}$.

Единицей гравитационной массы является килограмм, а электрического заряда – кулон.

Для единицы гравитационной массы определяющим является второй закон Ньютона, а для единицы электрического заряда – равенство количества электричества (проходящего через поперечное сечение цепи тока) произведению тока на время. Единица магнитной массы в применяемой нами системе единиц СИ не предусмотрена ввиду фиктивности понятия магнитной массы.

Согласно (2.8) - (2.9') сила взаимодействия единичных точечных масс на расстоянии 1 м приблизительно равна $6.67\cdot10^{-11}$ Н (ньютонов) для гравитационных масс и $9\cdot10^9$ Н для электрических зарядов.

Понятие "магнитная масса"- физически фиктивное и в международной системе физических единиц (СИ) не определено, но здесь удобно будет единичной магнитной массой считать магнитную массу m_D, отталкивающую такую же массу на расстоянии в 1 м с силой, равной 10^{-7} Н.

Полагая в (2.8) $m_1=m_2=m_D$, $F_{12}=10^{-7}$ Н, получаем согласно (2.9), (2.9')

$$m_D^2 = \frac{4\pi\cdot10^{-7}}{\mu_0}\,\text{м}^2\cdot\text{Н}, \quad \text{м}^2\cdot\text{Н} = \frac{\text{м}^3}{\text{Гн}}\cdot\text{Н} = \text{А}^2\cdot\text{м}^2,$$

так как Н·м = Гн·А^2. Таким образом, единица m_D магнитной массы равна одному ампер-метру.

При таком выборе единицы магнитной массы получаем предусмотренную в системе СИ единицу дипольного магнитного момента в А·м^2 (см. сноски в разделе I, § 5 и в разделе II, § 1 главы пятой).

II. Действие масс на точечную массу

Закон Кулона - Ньютона (2.8) непосредственно применим также к неточечным (объёмным, поверхностным и линейным) массам m_1 и m_2 при условии, что линейные размеры этих масс достаточно малы сравнительно с минимальным расстоянием между ними. В частности, формулой (2.8) можно воспользоваться для определения силы **dF**, с которой элементарная масса действует на другую элементарную массу или на точечную массу. Согласно этой формуле элементарная масса $dm_q = \delta_q \cdot dV$, $\sigma_q \cdot dS$, $\lambda_q \cdot dl$ с центром в точке q действует на точечную массу m_a, находящуюся в точке a, с силой

$$\mathbf{dF}_{qa} = \nu \cdot m_a \cdot \frac{dm_q}{L_{qa}^3} \cdot \mathbf{L}_{qa}. \qquad (2.8')$$

В соответствии с (2.8) и (2.8') совокупность точечных или элементарных масс, находящихся в точках q, действует на точечную массу m_a с силой

$$\mathbf{F}(a) = \nu \cdot m_a \cdot \sum \frac{m_q}{L_{qa}^3} \mathbf{L}_{qa} \quad \text{или} \quad \mathbf{F}(a) = \nu \cdot m_a \cdot \int \frac{dm_q}{L_{qa}^3} \mathbf{L}_{qa} \qquad (2.10)$$

соответственно. В общем случае, когда в пространстве имеются различные массы m, на точечную массу m_a, находящуюся в точке a, действует сила

$$\mathbf{F}(a) = \nu \cdot m_a \cdot \mathbf{f}(a), \qquad (2.11)$$

пропорциональная вектору

$$\mathbf{f}(a) = \sum \frac{m_q}{L_{qa}^3} \mathbf{L}_{qa} + \int_V \frac{\delta_q}{L_{qa}^3} \mathbf{L}_{qa}\, dV + \int_S \frac{\sigma_q}{L_{qa}^3} \mathbf{L}_{qa}\, dS + \int_l \frac{\lambda_q}{L_{qa}^3} \mathbf{L}_{qa}\, dl. \qquad (2.12)$$

Вектор $\nu \cdot \mathbf{f}(a)$ согласно этим формулам не зависит от массы m_a, а если совокупность масс m, действующих на массу m_a, фиксирована, то этот вектор меняется только при изменении координат точки a (перемещение которой вызывает изменения абсолютных величин и направлений векторов $\mathbf{L}_{qa}$) и, следовательно, зависит только от положения точки a.

III. Кулоново поле

Из сказанного следует, что в пространстве, в котором присутствуют массы, мы имеем векторное поле $\nu \cdot \mathbf{f}(a)$, определяемое формулами (2.11), (2.12). Это кулоново поле, т. е. поле сил, определяемых законом (2.8). Оно является гравитационным, электрическим или магнитным в зависимости от природы масс.

Будем пользоваться обозначениями

$$\nu \cdot \mathbf{f}(a) = \mathbf{F}(a)/m_a = \quad \mathbf{\Gamma}(a), \quad \mathbf{E}(a), \quad \mu_0 \cdot \mathbf{H}(a) \qquad (2.13)$$

соответственно для гравитационного, электрического и магнитного полей.

В развёрнутом виде для магнитного поля, создаваемого в вакууме магнитами (влияние тел которых не учитывается) следовало бы вместо (2.13) писать:

$$\nu \cdot \mathbf{f}(a) = \mathbf{F}(a)/m_a = \mathbf{B}(a) - \mu_0 \cdot \mathbf{J}^0(a) = \mu_0 \cdot \mathbf{H}(a), \qquad (2.13')$$

где **B** и $\mathbf{J}^0$ – векторы, которые будут введены в третьей главе.

Вектором $\nu \cdot \mathbf{f}(a)$ определяется сила $\mathbf{F}(a)$, с которой находящиеся в пространстве массы m действуют на массу m_a, помещаемую в какую-либо точку пространства. Иначе говоря, массы m создают в пространстве поле $\nu{\cdot}\mathbf{f}(a)$, которое действует на массу m_a с силой $\mathbf{F}(a)$, пропорциональной этому полю. Физический смысл этого выражения состоит в том, что в присутствии масс пространство приобретает некоторое свойство, благодаря которому помещенная в любую точку a масса m_a подвергается действию силы, зависящей от положения этой точки. Но для обнаружения этого свойства пространства, для проявления действия поля необходимо поместить в него массу m_a.

Точечную массу m_a, с помощью которой можно обнаружить поле $\nu{\cdot}\mathbf{f}(a)$, называют *пробной массой*. Условимся считать пробную массу положительной. Имея в виду более общий случай поля в присутствии среды, надо абсолютную величину пробной массы брать достаточно малой для того, чтобы она не вызывала изменений наблюдаемого поля, но при изучении, поля в вакууме это ограничение не нужно и пробную массу можно, в частности, выбрать единичной.

Вектор $\nu{\cdot}\mathbf{f}(a)$ есть сила, с которой поле действует на единичную пробную массу, или, точнее, сила, с которой поле действует на точечную массу, отнесённая к единице этой массы. Вектор $\mathbf{E}$ называют *напряжённостью электрического поля* или просто *электрическим полем*. *Магнитным полем*, а также *напряжённостью магнитного поля* по исторически сложившейся традиции называют вектор $\mathbf{H} = (\nu/\mu_0){\cdot}\mathbf{f}$.

Для того чтобы освободиться от множителя ν, имеющего различные значения для полей разной природы, в этой главе удобно вместо поля $\mathbf{F}(a)/m_a$ изучать поле $\mathbf{f}(a) = \mathbf{F}(a)/(\nu{\cdot}m_a)$, определяемое формулой (2.12) как сумма полей

$$\mathbf{f}(a) = \frac{m_q}{L_{qa}^3}\mathbf{L}_{qa} \quad \text{и} \quad \mathbf{df}(a) = \frac{dm_q}{L_{qa}^3}\mathbf{L}_{qa}, \tag{2.14}$$

создаваемых точечными массами m_q и элементарными (объёмными, поверхностными, линейными) массами dm_q (рис. 2.4).

Вектор $\mathbf{f}$ будем иногда называть напряжённостью поля $\mathbf{f}$.

Суммируя поля, определяемые формулами (2.14), получаем выражения для полей, создаваемых точечными, объёмными, поверхностными, линейными массами соответственно:

$$\mathbf{f}(a) = \sum\frac{m\,\mathbf{L}_{qa}}{L_{qa}^3},\ \mathbf{f}(a) = \int_V\frac{\delta\,\mathbf{L}_{qa}}{L_{qa}^3}dV,\ \mathbf{f}(a) = \int_S\frac{\sigma\,\mathbf{L}_{qa}}{L_{qa}^3}dS,\ \mathbf{f}(a) = \int_l\frac{\lambda\,\mathbf{L}_{qa}}{L_{qa}^3}dl. \tag{2.15}$$

Складывая правые части (2.15), получаем общее выражение (2.12) для поля $\mathbf{f}(a)$, создаваемого разными массами. Переход от (2.14) к (2.15) и (2.12), соответствующий переходу от (2.8), (2.8') к (2.10), основан на *принципе суперпозиции*. Этот подтверждаемый опытом принцип (наложения) сводится к тому, что действие массы в присутствии других масс не отличается от её действия в их отсутствии.

Это можно проиллюстрировать на простейшем примере, когда поле **f**(a) создают две точечные массы m_1 и m_2. На рис. 2.5 направления векторов **f** показаны для случая, когда $m_1>0$ и $m_2>0$.

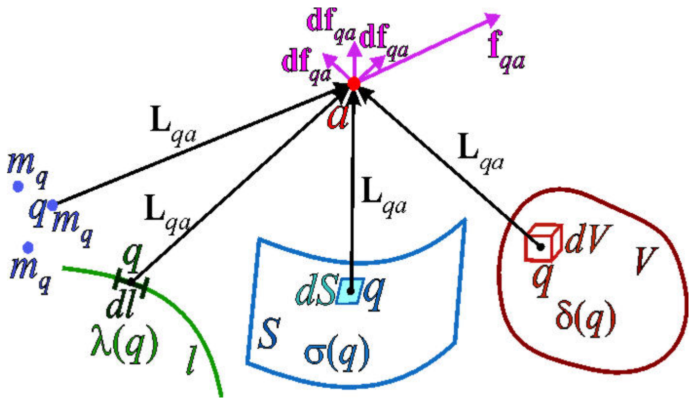

Рис. 2.4.
Слагаемые поля **f**, создаваемые разными массами – объёмными и не объёмными

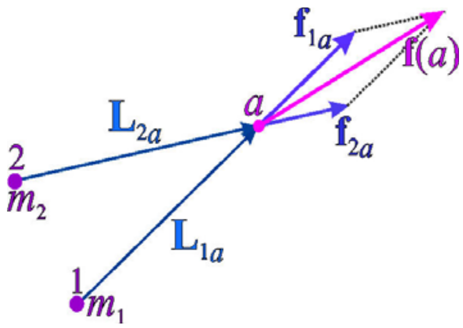

Рис. 2.5.
Поле **f**(a) двух точечных масс.
Направления векторов **f** соответствуют случаю, когда $m_1>0$ и $m_2>0$

Скалярные компоненты f_l, f_k поля **f** (с абсолютной величиной $f=|\mathbf{f}|$) по направлениям l и координатным линиям l_k (по которым возрастают координаты ξ_k) определяют формулы

$$f_l=f\cdot\cos(\mathbf{f},\,\mathbf{1}_l),\qquad f_k=f\cdot\cos(\mathbf{f},\,\mathbf{1}_k).$$

Для поля точечной массы m_q имеем согласно (2.14)

$$f(a)=\frac{|m_q|}{L_{qa}^2},\qquad \cos(\mathbf{f},\,\mathbf{1}_l)=\frac{m_q}{|m_q|}\cdot\cos(\mathbf{L}_{qa},\,\mathbf{1}_l),$$

а для поля элементарной массы dm_q

$$df(a)=\frac{|dm_q|}{L_{qa}^2},\qquad \cos(\mathbf{df},\,\mathbf{1}_l)=\frac{dm_q}{|dm_q|}\cdot\cos(\mathbf{L}_{qa},\,\mathbf{1}_l).$$

Поэтому получаем для l - компоненты полей **f** точечной и элементарной масс:

$$f_l(a)=\frac{m_q}{L_{qa}^2}\cdot\cos(\mathbf{L}_{qa},\,\mathbf{1}_l),\quad df_l(a)=\frac{dm_q}{L_{qa}^2}\cdot\cos(\mathbf{L}_{qa},\,\mathbf{1}_l).\tag{2.16}$$

Для направления оси X (и координатной линии l_x) имеем

$$\cos(\mathbf{L}_{qa},\,X)=\frac{x_a-x_q}{L_{qa}}.\tag{2.17}$$

Следовательно, x – компоненту поля **f**(a) точечной массы m_q определяет выражение

$$f_x(a)=\frac{m_q\left(x_a-x_q\right)}{L_{qa}^3}.\tag{2.18}$$

Подставляя y или z вместо x в (2.17), (2.18), получаем аналогичные формулы для направлений осей Y и Z. В общем случае поля, создаваемого различными массами, имеем согласно (2.12)

$$\left.\begin{aligned} f_l(a) = \sum \frac{m_q}{L_{qa}^2}\cdot\cos(\mathbf{L}_{qa}, \mathbf{1}_l) + \int\limits_V \frac{\delta_q}{L_{qa}^2}\cdot\cos(\mathbf{L}_{qa}, \mathbf{1}_l)\, dV + \\ + \int\limits_S \frac{\sigma_q}{L_{qa}^2}\cdot\cos(\mathbf{L}_{qa}, \mathbf{1}_l)\, dS + \int\limits_l \frac{\lambda_q}{L_{qa}^2}\cdot\cos(\mathbf{L}_{qa}, \mathbf{1}_l)\, dl, \end{aligned}\right\} \qquad (2.19)$$

$$\left.\begin{aligned} f_x(a) = \sum \frac{m_q(x_a - x_q)}{L_{qa}^3} + \int\limits_V \delta_q \frac{(x_a - x_q)}{L_{qa}^3} dV + \\ + \int\limits_S \sigma_q \frac{(x_a - x_q)}{L_{qa}^3} dS + \int\limits_l \lambda_q \frac{(x_a - x_q)}{L_{qa}^3} dl \end{aligned}\right\} \qquad (2.19)$$

и аналогично для скалярных компонент f_y и f_z.

IV. Замечания

Сказанное выше о поле **f** дополним следующими замечаниями.

1. В поле **f** под действием сил $\mathbf{F}=\nu\cdot\mathbf{f}\cdot m$ положительные массы m должны двигаться по направлению силовых линий, отрицательные – в противоположном направлении. Но в настоящей главе предполагается, что массы являются неподвижными, закреплёнными.

2. В случае гравитационного поля сила $\nu\cdot\mathbf{f}\cdot m$ антипараллельна вектору **f** и силовые линии имеют направления, противоположные векторным линиям l_f; но для общности изложения будем называть силовыми векторные линии l_f, не делая исключения для гравитационного поля.

3. Поле, создаваемое точечной массой m_q, согласно $(2.14)_1$ сферически симметрично относительно точки q. В этом поле вектор **f** всюду направлен как вектор $m\cdot\mathbf{L}_{qa}$ и имеет одинаковую абсолютную величину на одинаковых расстояниях L_{qa} от точки q. Векторные линии l_f – лучи, расходящиеся от точки q либо сходящиеся к ней с одинаковой густотой по всем направлениям. Величина f обратно пропорциональна квадрату расстояния от массы m_q.

4. Если все массы находятся в пределах некоторой области пространства Θ, ограниченной по всем направлениям, то при достаточном удалении точки a от этой области зависимость вектора $\mathbf{L}_{qa}$ от положения точки q становится незаметной и любой из векторов $\mathbf{L}_{qa}$ в выражении (2.12) можно заменить вектором $\mathbf{L}_{oa}$, где o – некоторая точка, произвольно взятая в области Θ в качестве начала отсчёта расстояний. Поэтому на расстояниях от области Θ (от её точки o), достаточно больших сравнительно с любым из линейных размеров этой области, будем иметь согласно (2.12)

$$\mathbf{f}(a) = \frac{m_\Theta}{L_{oa}^3}\mathbf{L}_{oa}, \quad m_\Theta = \sum m_q + \int\limits_\Theta \delta\, dV + \int\limits_S \sigma\, dS + \int\limits_l \lambda\, dl, \qquad (2.20)$$

где m_Θ – сумма масс, находящихся в области Θ; q, S и l – точки, поверхности и линии, расположенные в области Θ.

5. Обычно будем полагать, что все массы, создающие поле **f**, находятся на ограниченных расстояниях от начала отсчёта o (см. замечание 12 в § 1 главы первой) и согласно сказанному выше будем считать, что поле **f** в достаточно удалённых областях пространства совпадает с полем, которое мы имели бы, если бы все массы, фактически создающие поле, находились в какой-либо конечной точке, например, в точке o. При этом поле **f** на достаточно больших расстояниях от точки o убывает не медленнее, чем $\dfrac{1}{L_{oa}^2}$, оно *регулярно на бесконечности.* Если $m_\Theta \neq 0$, то поле **f** при больших значениях L_{oa} совпадает с полем, которое создавала бы равная m_Θ точечная масса, находящаяся в точке o. Это означает, что во всех точках сферической поверхности достаточно большого радиуса с центром в точке o абсолютная величина f вектора **f** имеет одно и то же значение, а его направление нормально к этой поверхности; по всем направлениям величина f убывает с расстоянием L_{oa} как обратная величина квадрата этого расстояния.

6. Исключениями являются случаи, когда массы простираются в каком-либо направлении до бесконечности или когда их сумма m_Θ равна нулю. В этих случаях поле **f** может вести себя на бесконечности иначе, чем поле точечной массы. Оно при больших удалениях от масс может убывать медленнее или быстрее, чем $1/L_{oa}^2$, и притом различно по разным направлениям.

7. Формулой (2.12) устанавливается соответствие между полем **f** и распределением создающих его масс в пространстве (полем плотности этих масс). Необходимым и достаточным условием постоянства поля **f** является постоянство совокупности создающих его масс. Любое её изменение должно вызвать некоторое изменение поля. Поэтому до тех пор, пока у нас идёт речь о постоянном поле, следует считать, что совокупность масс во всём пространстве не меняется со временем t, т. е. что выполняются условия (2.7) постоянства совокупности масс.

V. Поле плоской массы

На участке S плоскости Π, разделяющей полупространства V_1 и V_2, задана поверхностная масса, в общем случае неоднородная, с плотностью $\sigma(q)$ (рис. 2.6). Определим нормальную к плоскости Π компоненту f_n напряжённости поля **f**, создаваемого этой плоской массой в произвольно взятой точке a. Нормаль n по обыкновению направим от области V_1 к V_2. Согласно $(2.14)_2$ элемент массы $dm=\sigma\cdot dS$, занимающий площадку dS со средней точкой q, создаёт в точке a поле $\mathbf{df}=\sigma\cdot dS\cdot L_{qa}^{-3}\cdot\mathbf{L}_{qa}$ с компонентой

$$df_n = df \cdot \cos(\mathbf{f},\, \mathbf{n}) = \frac{\sigma \cdot dS}{L_{qa}^2} \cdot \cos(\mathbf{L}_{qa},\, \mathbf{dS}) = -\sigma \cdot \frac{(\mathbf{L}_{aq}\ \mathbf{dS})}{L_{qa}^3} = -\sigma \cdot d\omega,$$

где $d\omega$ – угол видимости площадки dS из точки a, определяемый формулой (1.128")$_1$. Суммируя элементы df_n, соответствующие всем площадкам dS, составляющим участок S плоскости Π, получаем формулы

$$f_n = -\int_S \sigma\, d\omega, \qquad f_n = -\sigma \cdot \omega, \tag{2.21}$$

из которых вторая формула соответствует случаю однородной (на S σ=const) плоской массы, видной из точки a под углом ω. Из (2.21)$_2$ видно, что поле скаляра f_n в случае плоской однородной массы отличается от поля угла видимости ω плоской поверхности S, несущей эту массу, только постоянным (не зависящим от положения точки a) множителем $-\sigma$. Следовательно, с помощью этого множителя можно перейти от результатов, полученных в § 9 первой главы для второго из этих двух полей (ω), к аналогичным результатам для первого из них (f_n).

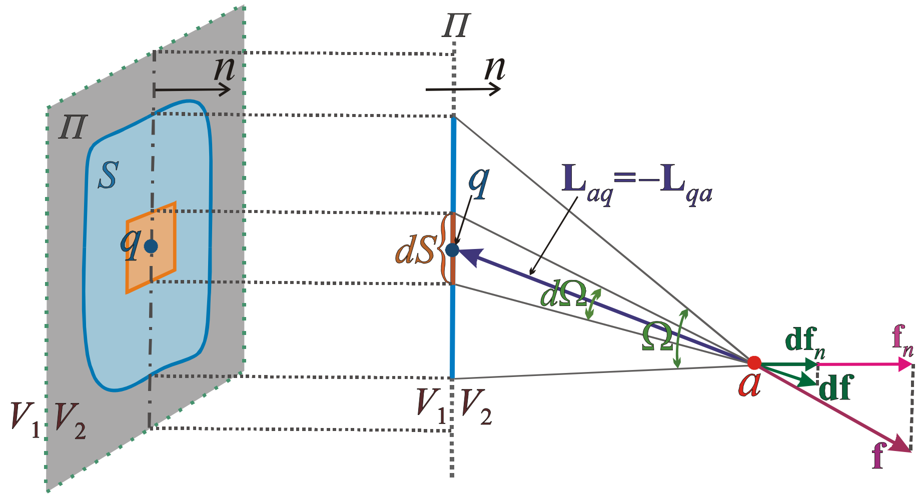

Рис. 2.6.

Нормальная компонента $\mathbf{f}_n$ поля $\mathbf{f}$ плоской массы

На рис. 2.6 схематично показаны телесные углы $d\Omega$ и Ω при вершине a конических поверхностей с направляющими $l[dS]$ и $l[S]$ соответственно. Абсолютные величины углов видимости ориентированных площадки dS и поверхности S из точки a: $|d\omega|=d\Omega$, $|\omega|=\Omega$. При показанных на этом рисунке положении точки a и направлении нормали n углы видимости $d\omega<0$, $\omega<0$ (см. рис. В.13 в разделе "Введение" в Части I).

Отмечая индексами 1 и 2 обозначения, относящиеся к областям V_1 и V_2, имеем в соответствии с (1.130') для некрайней точки p участка S формулы

$$f_n^{(1)}(p) = -2\pi \cdot \sigma, \quad f_n(p) = 0, \quad f_n^{(2)}(p) = 2\pi \cdot \sigma, \tag{2.22}$$

справедливые при любых размерах участка S и, в частности, для элементарного участка dS (на рис. 2.6 расстояние $L_{qp} \to 0$).

Если участок S, на котором задана однородная поверхностная масса, занимает всю плоскость Π, то в соответствии с (1.129")

$$f(a) = 2\pi \cdot |\sigma|, \quad f_n^{(1)}(a) = -2\pi \cdot \sigma, \quad f_n^{(2)}(a) = 2\pi \cdot \sigma \tag{2.22'}$$

для всех точек a в полупространствах V_1 и V_2. Пользуясь системой x, y, z, или r, φ, z с осью Z по нормали n и с началом O в плоскости Π, можно вместо (2.22') написать

$$\mathbf{f}=2\pi\cdot\sigma\cdot\mathrm{sgn}(z)\cdot\mathbf{1}_z=2\pi\cdot\sigma\cdot\frac{z}{|z|}\cdot\mathbf{1}_z. \qquad (2.23)$$

Формулы (2.22') и (2.23) также справедливы для ограниченного участка S плоскости, содержащего проекцию p точки a при условии, что расстояние L_{pa} достаточно мало по сравнению с расстояниями от p до точек границы $l[S]$ участка S.

Допустим, что на двух плоскостях $z=z_1$ и $z=z_2$ ($z_2>z_1$) имеем однородные поверхностные массы с плотностями σ_1 и σ_2. Тогда согласно (2.23) при $z<z_1$, $z>z_2$ и $z_1<z<z_2$ имеем порознь однородные поля $\mathbf{f}$, равные соответственно

$$-2\pi\cdot(\sigma_1+\sigma_2)\cdot\mathbf{1}_z, \qquad 2\pi\cdot(\sigma_1+\sigma_2)\cdot\mathbf{1}_z, \qquad 2\pi\cdot(\sigma_1-\sigma_2)\cdot\mathbf{1}_z. \qquad (2.23')$$

Если $z_1=-h/2$, $z_2=+h/2$, $\sigma_1=-\sigma$, $\sigma_2=\sigma$ (рис. 2.7), то

$$\mathbf{f}=0 \text{ при } |z|>\frac{h}{2}, \qquad \mathbf{f}=-4\pi\cdot\sigma\cdot\mathbf{1}_z \text{ при } |z|<\frac{h}{2}. \qquad (2.23'')$$

При $h\to\infty$ такое поле однородно во всём пространстве:

$$\mathbf{f}=-4\pi\cdot\sigma\cdot\mathbf{1}_z. \qquad (2.23''')$$

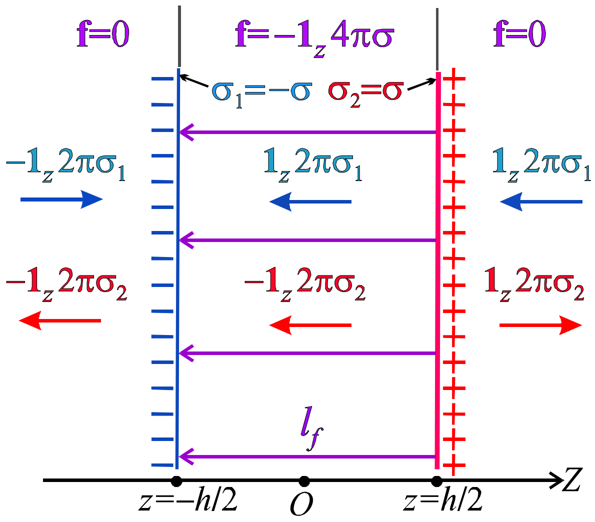

Рис. 2.7.
Поле двух неограниченных параллельных однородных разноимённых плоских масс

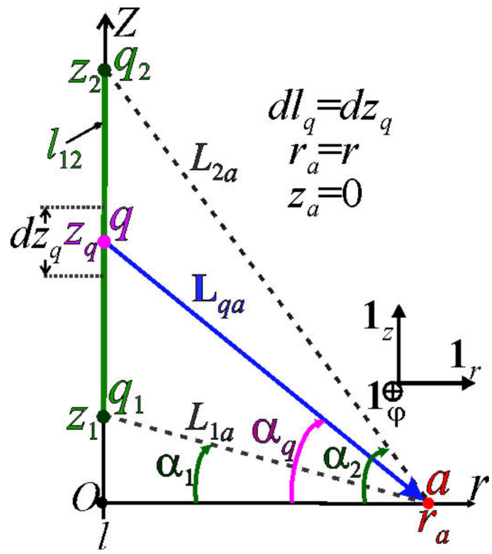

Рис. 2.8.
Построение, поясняющее вывод выражений для компонент поля, создаваемого прямолинейной массой

VI. Поле прямолинейной массы

Пусть линейная масса с плотностью λ расположена на отрезке l_{12} некоторой прямой l. Возьмём эту прямую и перпендикулярную к ней плоскость, проходящую через точку a, в качестве оси Z и плоскости $z=0$ цилиндрической системы координат r, φ, z (рис. 2.8). Согласно $(2.15)_4$ в данном случае вектор $\mathbf{f}$ лежит в полуплоскости $\varphi=\mathrm{const}$ и не зависит от координаты φ, т. е. $\mathbf{f}=\mathbf{1}_r \cdot f_r(r,z)+\mathbf{1}_z \cdot f_z(r,z)$. Определим компоненты $f_r(r,z)$ и $f_z(r,z)$ в точке a. Масса $dm=\lambda \cdot dl_q$ элемента dl_q отрезка l_{12} с центром в точке q согласно $(2.14)_2$ создаёт в точке a поле $\mathbf{df} = \lambda \dfrac{\mathbf{L}_{qa}}{L_{qa}^3} dz_q$ с компонентами

$$df_r = \frac{\lambda \cdot dz_q}{L_{qa}^2} \cos \alpha_q, \quad df_z = \frac{-\lambda \cdot dz_q}{L_{qa}^2} \sin \alpha_q, \tag{2.24}$$

где $L_{qa} = \sqrt{r^2 + z_q^2}$; $r=r_a$ и z_q - координаты точек a и q; $\cos \alpha_q = r / L_{qa}$, $\sin \alpha_q = z_q / L_{qa}$, $\operatorname{tg} \alpha_q = z_q / r$.

Суммируя элементы df_r и df_z, получаем

$$f_r = \int_{z_1}^{z_2} \lambda \frac{\cos \alpha_q}{L_{qa}^2} dz_q, \quad f_z = -\int_{z_1}^{z_2} \lambda \frac{\sin \alpha_q}{L_{qa}^2} dz_q, \tag{2.24'}$$

где z_1 и z_2 – координаты концов (точек q_1 и q_2) отрезка l_{12}; $dz_q = r \cdot d\operatorname{tg} \alpha_q = \dfrac{r}{\cos^2 \alpha_q} d\alpha_q$, следовательно, для случая однородной прямолинейной массы

$$f_r = \lambda \cdot r \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha_q}{L_{qa}^2 \cdot \cos \alpha_q} = \frac{\lambda}{r} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha_q \, d\alpha_q = \frac{\lambda}{r} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) = \frac{\lambda}{r} \left(\frac{z_2}{L_{2a}} - \frac{z_1}{L_{1a}} \right), \tag{2.25}$$

$$f_z = -\lambda \cdot r \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\sin \alpha_q \, d\alpha_q}{L_{qa}^2 \cdot \cos^2 \alpha_q} = \frac{-\lambda}{r} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha_q \, d\alpha_q = \frac{\lambda}{r} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) = \lambda \left(\frac{1}{L_{2a}} - \frac{1}{L_{1a}} \right), \tag{2.25'}$$

где $L_{1a} = \sqrt{r^2 + z_1^2}$, $L_{2a} = \sqrt{r^2 + z_2^2}$.

Пусть $z_2 > 0 > z_1$, т. е. пусть проекция o точки a на прямую l совпадает с некрайней точкой p отрезка l_{12}. При этом условии, полагая $r \to 0$, получаем $\alpha_1 \to -\pi/2$, $\alpha_2 \to \pi/2$, а расстояния $L_{1a} \to -z_1$, $L_{1a} \to z_2$. Следовательно, если p – некрайняя точка отрезка l_{12}, то при $a \to p$

$$f_r = \frac{2\lambda}{r}, \qquad f_z = \lambda \left(\frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_1} \right) = \lambda \left(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{|z_1|} \right). \tag{2.26}$$

Если $z_1 = -z_2$, т. е. если точка a находится на равных расстояниях от концов q_1 и q_2 отрезка l_{12}, то

$$\alpha_2 = -\alpha_1 = \alpha, \quad L_{1a} = L_{2a}, \quad f_r = \frac{2\lambda}{r} \cdot \sin \alpha, \quad f_z = 0. \tag{2.26'}$$

Если $z_2 > 0 > z_1$ и $r \ll |z_1|$, $r \ll z_2$, то

$$\mathbf{f} = \mathbf{1}_r \cdot \frac{2\lambda}{r}. \tag{2.27}$$

Эта формула справедлива при любом размере отрезка l_{12} и, в частности, для элементарного отрезка dl с центром в точке p, когда точка $a \to p$. Она также справедлива при любом положения точки a для поля однородной прямолинейной массы, не ограниченной с обеих сторон.

Выше предполагалось, что координата z_a точки a равна нулю, В более общем случае, когда $z_a \neq 0$, надо вместо z_q, z_1, z_2 подставить $z_q - z_a$, $z_1 - z_a$, $z_2 - z_a$.

§ 3. УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ

В соответствии с изложенным в § 7 первой главы поле вектора **f** характеризуют уравнения вида (1.92), и нам остаётся определить в общем виде свободные члены этих уравнений для поля **f**. Иначе говоря, надо найти выражения для ротора и дивергенции поля **f** при произвольно заданном распределении масс в пространстве.

I. Первое уравнение

Согласно (2.14) поле **f** точечной массы или поле **df** элементарной массы определяет вектор $\mathbf{L}_{qa} / L_{qa}^3$. Поэтому в соответствии с (1.136) производная rot **f**=0. Это первое дифференциальное уравнение поля **f**. Из него, согласно теореме Стокса (1.23), следует равенство нулю циркуляции вектора **f**.

Можно идти обратным путем: доказать, исходя из физических соображений, равенство нулю циркуляции вектора **f** и на этом основании заключить, что rot **f**=0. Действительно, в результате обхода массы m_a по замкнутому контуру $l[S]$ она оказывается в исходном положении, а массы m, создающие поле **f**, согласно условию постоянства поля (2.7) при этом не меняются. Таким образом, вся система (масс в пространстве) после обхода будет находиться в исходном состоянии. Следовательно, согласно принципу сохранения энергии, работа, совершаемая при обходе, должна быть равна нулю. А из этого по теореме Стокса получаем равенство $\int_S (\mathrm{rot}\,\mathbf{f}\ \mathbf{dS}) = 0$, из которого ввиду его справедливости для любой поверхности S следует равенство нулю вектора rot **f**. Таким образом, в кулоновом поле

$$\oint_l (\mathbf{f}\ \mathbf{dl}) = 0, \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{f} = 0. \tag{2.28}$$

Равенство $(2.28)_2$ равносильно совокупности равенств нулю трёх компонент вектора rot **f**, выражаемых формулами (1.25) – (1.27''). Например, в декартовых координатах, в соответствии с (1.27)

$$\frac{\partial f_z}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial f_x}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_y}{\partial x} = \frac{\partial f_x}{\partial y}. \tag{2.28'}$$

Равенство $(2.28)_1$ является интегральной формой первого уравнения поля $(2.28)_2$.

II. Второе уравнение

Согласно $(2.14)_1$ и (1.128') в поле **f**, создаваемом точечной массой m_q, поток вектора **f** через поверхность S

$$\psi_{qS} = \int_S (\mathbf{f}\ \mathbf{dS}) = m_q \cdot \int_S \frac{(\mathbf{L}_{qa}\ \mathbf{dS})}{L_{qa}^3} = m_q \cdot \omega_{qS},$$

где ω_{qS} – угол видимости поверхности S из точки q; a – средняя точка элемента dS этой поверхности.

Следовательно, согласно (1.129) в поле точечной массы поток, вектора **f** через замкнутую поверхность $S[V]$, ограничивающую область V, определяет формула

$$\oint_{S[V]} (\mathbf{f}\ \mathbf{dS}) = \begin{cases} 4\pi \cdot m_q, \text{ если точка } q \text{ находится в области } V, \\ 0, \quad \text{если точка } q \text{ находится вне области } V. \end{cases} \tag{2.29}$$

Если поле **f** создаёт совокупность точечных масс m_q, то согласно (2.29) массы m_q, находящиеся вне области V, создают потоки ψ_{qS}, равные нулю, а массы m_q, расположенные внутри этой области, – потоки, равные $4\pi \cdot m_q$. Следовательно, в поле, создаваемом совокупностью точечных масс m_q, поток через замкнутую поверхность $S[V]$

$$\oint_{S[V]} (\mathbf{f}\ \mathbf{dS}) = 4\pi \cdot \sum_V m_q, \tag{2.29'}$$

где суммирование проводится только по тем точкам q, которые находятся в области V. Очевидно, что формула (2.29') остаётся справедливой при замене в ней точечных масс m_q элементарными массами dm_q: $\delta \cdot dV$, $\sigma \cdot dS$, $\lambda \cdot dl$.

Таким образом, получаем для поля объёмных масс и для общего случая различных масс соответственно

$$\oint_{S[V]} (\mathbf{f}\ \mathbf{dS}) = 4\pi \cdot \int_V \delta\ dV, \qquad \oint_{S[V]} (\mathbf{f}\ \mathbf{dS}) = 4\pi \cdot m_V, \tag{2.30}$$

где m_V – сумма масс, находящихся в области V, определяемая формулой $(2.20)_2$ с подстановкой V вместо Θ.

Формулы (2.30) выражают *закон* (*теорему*) *Гаусса*, согласно которому в кулоновом (ньютонианском) поле поток напряжённости поля (**Г**, **E**, **H**) через замкнутую поверхность пропорционален массе (заряду), находящейся внутри этой поверхности.

Применяя к **f** теорему Гаусса-Остроградского (1.30), получаем из $(2:30)_1$ для поля объёмных масс равенство

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{f}\ dV = 4\pi \cdot \int_V \delta\ dV, \tag{2.31}$$

из которого (ввиду его справедливости для произвольной области V) следует равенство подынтегральных функций. Таким образом, имеем для поля **f** дифференциальное уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(a) = 4\pi \cdot \delta(a), \tag{2.32}$$

интегральной формой которого является закон Гаусса $(2.30)_1$. Применяя (1.32), можно представить уравнение (2.32) в координатной системе ξ_1, ξ_2, ξ_3

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial (h_2 h_3 f_1)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial (h_3 h_1 f_2)}{\partial \xi_2} + \frac{\partial (h_1 h_2 f_3)}{\partial \xi_3} \right] = 4\pi \cdot \delta. \tag{2.33}$$

В частности, в декартовых координатах получаем

$$\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}+\frac{\partial f_z}{\partial z}=4\pi\cdot\delta. \qquad (2.33')$$

III. Система уравнений

Итак, для поля **f** имеем систему дифференциальных уравнений $(2.28)_2$ и (2.32):

$$\text{I. } \mathrm{rot}\,\mathbf{f}=0, \qquad \text{II. } \mathrm{div}\,\mathbf{f}=4\pi\cdot\delta. \qquad (2.34)$$

Согласно первому уравнению этой системы поле **f** всюду ламелларно (и потенциально); в нём нет замкнутых векторных линий. Из этого следует, что, если поле **f** не равно всюду нулю и, следовательно, линии l_f имеются, то они должны быть разомкнутыми, должны существовать точки обрыва g^f, т. е. поле **f** должно иметь источники. Второе уравнение системы (2.34) определяет место и количество (плотность, обильность) этих источников. По этому уравнению поток вектора **f** через границу $S[dV]$ малой окрестности dV точки a, отнесённый к единице объёма этой окрестности, равен $4\pi\cdot\delta(a)$. Иначе говоря, число векторных линий l_f, расходящихся из окрестности dV точки a (считая схождение отрицательным расхождением), пропорционально массе, находящейся в этой окрестности.

При $\delta>0$ или $\delta<0$ имеем согласно (2.32) соответственно $\mathrm{div}\,\mathbf{f}>0$ или $\mathrm{div}\,\mathbf{f}<0$, следовательно, векторные линии l_f расходятся из мест, где масса положительна, и сходятся к местам, где она отрицательна. Они начинаются на положительных массах и кончаются на отрицательных. Истоками поля **f** и его стоками служат места, занятые соответственно положительными и отрицательными массами (зарядами).

Согласно (1.38) из $(2.28)_2$ следует, что векторный поток

$$\oint_S[\mathbf{dS}\ \mathbf{f}]=0. \qquad (2.28'')$$

Этот вид интегральной формы первого уравнения аналогичен интегральной форме (2.30) второго уравнения поля **f**.

Уравнения поля **f** мы получили в двух формах: дифференциальной и интегральной. Интегральная форма (2.30) второго уравнения поля **f** представляет собой соотношение между напряжённостью поля **f** в точках поверхности $S[V]$ и плотностью массы в точках области V, т. е. соотношение между величинами, относящимися к различным точкам пространства. Что же касается дифференциальной формы (2.32) этого же уравнения, то она является соотношением между величинами $\mathrm{div}\,\mathbf{f}$ и δ, относящимися к одной и той же точке и характеризующими поле и массу в окрестности этой точки. Аналогичное можно отметить, сопоставляя, интегральную и дифференциальную формы $(2.28)_1$ и $(2.28)_2$ первого уравнения поля **f**.

Любое из уравнений (законов) *в дифференциальной форме*, с которыми мы встретимся, представляет собой соотношение между величинами, относящимися *к одной и той же точке*, между их значениями, характеризующими окрестность этой точки (поле, массу, среду и т. д. в окрестности этой точки).

Подставляя в (2.32) функцию $\delta(a)$, заданную для какой-либо области V, получаем уравнение для этой области. В области V, в которой масс нет, поле **f** удовлетворяет системе однородных уравнений:

$$\text{I. } \operatorname{rot}\mathbf{f}=0, \qquad \text{II. } \operatorname{div}\mathbf{f}=0. \qquad (2.34')$$

Прямая задача теории статического поля в вакууме состоит в определении поля **f** по заданным массам. Эту задачу для области V, в которой задана плотность δ объёмных масс, можно решать с помощью системы дифференциальных уравнений (2.34), о чём более подробно будет идти речь в § 8. Определить поле, создаваемое заданными массами, можно по формуле (2.12), согласно которой расчёт этого поля сводится к суммированию полей, порождённых элементарными и точечными массами. При таком прямом расчёте поля могут встретиться затруднения только сугубо технического характера (громоздкое интегрирование), которое легко преодолеваются с помощью сравнительно простых технических средств. Но этот простой способ решения прямой задачи годится только тогда, когда известны все массы, создающие поле, где бы они ни находились. Пользуясь указанной формулой, надо подставить в неё величины (m_q, δ, σ, λ), определяющие все эти массы, даже в том случае, когда нас интересует поле только в отдельной области пространства V. Между тем поле **f** часто приходится рассчитывать в таких случаях, когда нам не все источники этого поля известны. При расчётах поля в вакууме (о которых идёт речь в этой главе) все массы, создающие поле, могут быть заданы произвольно, и мы будем считать их в области V известными полностью. Но массы, находящиеся вне области V, могут не быть заданными при расчёте поля в этой области.

Особенность способа расчёта, опирающегося на систему (2.34), состоит в том, что поле **f** в области V определяется без сведений о массах, находящихся вне этой области. Система (2.34) сама по себе определяет поле **f** только с точностью до поля любых масс, находящихся вне этой области. Но эта недостаточность системы (2.34), как будет показано в § 8, восполняется некоторыми дополняющими условиями.

§ 4. ПОТЕНЦИАЛ

Согласно (1.62) из первого уравнения ($\operatorname{rot}\mathbf{f}=0$) системы (2.34) следует, что вектор

$$\mathbf{f}=-\operatorname{grad} U, \qquad (2.35)$$

где U – потенциал поля **f**. Для любого из векторных полей **f**, создаваемых всевозможными совокупностями масс, должно существовать некоторое скалярное поле U, связанное с векторным полем **f** соотношением (2.35).

Согласно изложенному в § 2 главы первой из (2.35) следует, что вектор **f** всюду имеет направление наиболее интенсивного падения потенциала U. Это же направление имеют векторные линии l_f поля **f**, отличающиеся от линий градиента потенциала только противоположной ориентацией. Эквипотенциальные поверхности U=const нормальны к векторным (силовым) линиям l_f. Абсолютная величина f напряжённости поля **f** равна падению потенциала на единицу длины по силовой (векторной) линии или, точнее, падению потенциала на элементарном отрезке силовой линии, делённому на длину этого отрезка.

I. Выражения для поля f через его потенциал *U*

Согласно (1.10'') и (2.35) скалярная компонента поля **f** по любому направлению l

$$f_l = -\operatorname{grad}_l U = -\nabla_l U = -\partial U/\partial l. \tag{2.36}$$

В частности, для нормальной и тангенциальной компонент вектора **f** на какой-либо поверхности S

$$f_n = -\partial U/\partial n, \quad f_t = -\partial U/\partial t, \tag{2.36'}$$

где $\partial U/\partial n$ и $\partial U/\partial t$ – нормальная и тангенциальная производные потенциала U на этой поверхности.

Принимая во внимание (1.10'''), имеем согласно (2.36) для компонент поля **f** по координатным направлениям l_1, l_2, l_3 выражения

$$f_k = -\frac{1}{h_k}\cdot\frac{\partial U}{\partial \xi_k} \quad (k = 1,\ 2,\ 3) \tag{2.37}$$

и, в частности, в системе x, y, z

$$f_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad f_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad f_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{2.37'}$$

Из сказанного следует, что расчёт поля **f** можно заменить расчётом поля U. От потенциала U по приведенным выше формулам можно перейти к полю **f** дифференцированием функции U в точке наблюдения a (в которой определяются U и **f**) по координатам этой точки. Практический смысл такого применения потенциала U состоит в том, что рассчитать и исследовать скалярное поле U проще, чем векторное поле **f**, определяемое совокупностью трёх скалярных полей его компонент f_1, f_2, f_3.

На эквипотенциальной поверхности

$$U = \text{const}, \qquad f_t = 0, \qquad \mathbf{f} = -\mathbf{n}\cdot\partial U/\partial n. \tag{2.38}$$

Возможны эквипотенциальные области. Во всех точках такой области $\operatorname{grad} U = 0$, $U = \text{const}$, $\mathbf{f} = 0$.

Встречаются отдельные точки, в которых $\mathbf{f} = 0$ и направление поля становится неопределённым. В таких точках потенциал U имеет максимум, минимум или «минимакс» (см. § 1 главы первой).

II. Выражения для потенциала *U* через напряжённость поля f

Умножая обе части равенства (2.35) скалярно на вектор **dl** и интегрируя по линии l_{ab} от точки a до точки b, получаем согласно (1.12)

$$\int_a^b (\mathbf{f}\,\mathbf{dl}) = -\int_a^b (\operatorname{grad} U\ \mathbf{dl}) = -\int_a^b \operatorname{grad}_l U\ dl = -\int_a^b \frac{\partial U}{\partial l} dl = -\int_a^b dU = U_a - U_b \tag{2.39}$$

и в соответствии с обозначением (1.21) для напряжения поля

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{ab} = \int_a^b (\mathbf{f}\,\mathbf{dl}) = U_a - U_b. \qquad (2.39')$$

Равенство (2.39) является интегральной формой соотношения (2.36) между полем **f** и его потенциалом *U*. Вектор **f** под интегралом представляет собой напряжённость поля в точке a', пробегающей путь l_{ab}. Таким образом, в постоянном поле **f** напряжение между любыми точками a и b (работа на любом пути между этими точками) равна разности потенциалов этих точек.

Взяв в качестве точки b некоторую фиксированную точку *ф*, получаем, согласно (2.39), выражение для потенциала *U* в точке a как функцию положения одной только этой (переменной) точки:

$$U(a) = \int_a^{ф} (\mathbf{f}\,\mathbf{dl}) + U(ф). \qquad (2.40)$$

Таким образом, потенциал *U* в точке a представляет собой работу, которую произвела бы сила **f** при перемещении единичной пробной массы от точки a по какому-либо пути до точки *ф*, плюс потенциал этой точки.

Очевидно, что результат применения формул (2.36) – (2.37') к потенциалу *U*(*a*), определяемому формулой (2.40), не зависит от постоянной *U*(*ф*). Он не зависит также от положения точки *ф*, так как в этих формулах имеется в виду дифференцирование по точке a. Следовательно, положение точки *ф* и значение *U*(*ф*) в формуле (2.40) могут быть выбраны произвольно. Любое изменение положения точки *ф* или её потенциала *U*(*ф*) вызывает изменение значения потенциала *U*(*a*) во всех точках пространства на одну и ту же величину, оно не влияет на характер изменения потенциала *U* в окрестности какой-либо точки и поэтому не отражается на результате дифференцирования функции *U* в этой точке по какому-либо направлению. Значение постоянной *U*(*ф*) в (2.40) можно при расчётах поля оставить неопределённым, т. е. можно обозначить $U(ф) = C$ и представить определение потенциала (2.40) в следующем виде:

$$U(a) = \int_a^{ф} (\mathbf{f}\,\mathbf{dl}) + C. \qquad (2.41)$$

Удобно положить $U(ф) = 0$ и таким образом освободиться от несущественного для определения поля **f** слагаемого в выражении для потенциала. Выбирая точку *ф* на бесконечности, имеем согласно (2.40)

$$U(a) = \int_a^{\infty} (\mathbf{f}\,\mathbf{dl}) + U(\infty). \qquad (2.41')$$

Чаще всего так поступают и, полагая $U(\infty) = 0$, определяют потенциал по формуле

$$U(a) = \int_a^{\infty} (\mathbf{f}\,\mathbf{dl}). \qquad (2.42)$$

Умножая обе части (2.42) на m_a, получаем

$$m_a \cdot U(a) = m_a \cdot \int_a^{\infty} (\mathbf{f}\,\mathbf{dl}). \qquad (2.42')$$

Правая часть (2.42') есть работа, которую выполнило бы поле, если бы массе m_a была предоставлена возможность двигаться под его действием. Этой работе, делённой на m_a, равен потенциал U в точке a.

Подставляя (2.36) и (2.36') в уравнения $(2.28)_1$ и (2.30), получаем

$$\oint_l \frac{\partial U}{\partial l} dl = 0, \quad \oint_{S[V]} \frac{\partial U}{\partial n} dS = -4\pi \cdot \int_V \delta\, dV, \quad \oint_{S[V]} \frac{\partial U}{\partial n} dS = -4\pi \cdot m_V. \quad (2.43)$$

Согласно $(2.43)_1$ сумма приращений потенциала на замкнутом пути l равна нулю. Иначе говоря, сумма падений потенциала на замкнутом пути равна сумме его подъёмов на этом пути. Из этого следует, что изменение потенциала на замкнутом пути не может быть монотонным.

Формулами (2.39) – (2.42) можно воспользоваться для расчёта потенциала U по известному полю $\mathbf{f}$. Зная или задавая произвольно потенциал какой-либо точки b, можно по формуле (2.39) определить его в любой точке a, если нам известно поле $\mathbf{f}$ на пути l_{ab}, соединяющем эту точку с точкой b. Удобно выбрать этот путь по отрезку векторной линии l_f между эквипотенциальными поверхностями, проходящими через точки a и b. При этом $\cos(\mathbf{f}, \mathbf{dl}) = \pm 1$, скалярное произведение $(\mathbf{f}\,\mathbf{dl}) = \pm f \cdot dl$, где знак минус получается, когда направление пути интегрирования противоположно направлению векторной линии l_f. Сказанное о выборе пути l_{ab} относится также к случаю, когда b есть фиксированная точка ϕ и, в частности, когда эта точка берётся на бесконечности и потенциал вычисляется по формуле (2.41') или (2.42).

Выбирая точку ϕ на бесконечности, мы придаём одинаковое значение $U(\phi)$ потенциалу во всех точках достаточно удалённой части пространства, предполагая, что там напряжения (работы) между различными точками незаметны. Вполне понятно, что для этого мы должны быть уверены, что напряжённость поля $\mathbf{f}$ в этой части пространства мало отличается от нуля, т. е. что величина $f(a)$ при неограниченном удалении точки a убывает и притом не слишком медленно. Интегралы в (2.41') и (2.42) – несобственные, путь интегрирования $l_{a\infty}$ имеет бесконечно большую длину, но при достаточно быстром (интенсивном) уменьшении напряжённости поля с удалением точки a до бесконечности падение потенциала $U(a) - U(\infty)$, т. е. работа на бесконечно длинном пути $l_{a\infty}$, имеет ограниченное значение, интегралы сходятся, потенциал «регулярен на бесконечности». При этом условии, выбирая точку ϕ на бесконечности, мы можем иметь в виду совокупность всех достаточно далёких точек. Если же это условие (регулярности потенциала на бесконечности) не выполняется, то брать точку ϕ на бесконечности неудобно. Для регулярности потенциала на бесконечности надо, чтобы там поле $\mathbf{f}$ удовлетворяло условию (2.20), для чего достаточно, чтобы все массы, создающие поле, находились на ограниченных расстояниях (см. раздел IV § 2).

III. Выражения для потенциала U через массы, создающие поле

Согласно (2.42) и $(2.14)_1$ в случае поля, создаваемого точечной массой m_q, находящейся в точке q, имеем в точке a потенциал

$$U(a) = m_q \cdot \int_a^{\infty} \frac{(\mathbf{L}_{qa'},\ \mathbf{dl})}{L_{qa'}^3}. \qquad (2.44)$$

Такое же выражение, но с подстановкой dm_q вместо m_q, получаем для потенциала dU поля **df**, создаваемого элементарной массой dm_q. Индекс a' при L под интегралом обозначает переменную точку (аргумент функции L_{qa}), по которой производится криволинейное интегрирование от точки a до бесконечности. В сферической системе координат R, θ, φ с началом в точке q имеем $L_{qa'}=R$, $L_{qa}=R_a$. Перемещая точку a' по векторной линии l_f, т. е. по лучу l_R, получаем $\mathbf{dl}=\mathbf{dR}$, скалярное произведение $(\mathbf{L}_{qa'}\ \mathbf{dl})=(\mathbf{R}\ \mathbf{dR})=R{\cdot}dR$, следовательно:

$$U(a) = m_q \cdot \int_{R_a}^{\infty} \frac{dR}{R^2} = \frac{m_q}{R_a}.$$

Таким образом,

$$U(a)=m_q/L_{qa}, \qquad dU(a)=dm_q/L_{qa}, \qquad (2.44')$$

т. е. потенциал поля, создаваемого точечной или элементарной массой, обратно пропорционален расстоянию от неё. Из (2.44') суммированием и интегрированием получаем для потенциалов $U(a)$ полей $\mathbf{f}(a)$, создаваемых различными массами: точечными, объёмными, поверхностными, линейными (соответственно) выражения

$$\sum \frac{m_q}{L_{qa}}, \quad \int_V \frac{\delta\ dV}{L_{qa}}, \quad \int_S \frac{\sigma\ dS}{L_{qa}}, \quad \int_l \frac{\lambda\ dl}{L_{qa}}, \qquad (2.44'')$$

а для общего случая поля, создаваемого совокупностью различных масс,

$$U(a) = \sum \frac{m_q}{L_{qa}} + \int_V \frac{\delta\ dV}{L_{qa}} + \int_S \frac{\sigma\ dS}{L_{qa}} + \int_l \frac{\lambda\ dl}{L_{qa}}. \qquad (2.45)$$

Сопоставляя это выражение для потенциала с выражениями вида (2.19') для компонент вектора **f**, мы видим, что (в общем случае) расчёт потенциала скалярного поля U проще расчёта каждого из трёх скалярных полей f_k, определяющих векторное поле **f**. Но для расчёта потенциала U в какой-либо области пространства по формуле (2.45) так же, как для определения поля **f** по формуле (2.12), необходимо знать все массы, создающие поле, где бы они ни находились.

IV. Уравнение Пуассона – Лапласа

Подставим во второе уравнение системы (2.34) решение (2.35) первого уравнения этой системы и получим $(\nabla(\nabla U))=-4\pi{\cdot}\delta$, т. е.

$$\nabla^2 U = -4\pi\cdot\delta \tag{2.46}$$

или согласно (1.65')

$$\nabla^2 U = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\sum\left[\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_k^2}\cdot\frac{\partial U}{\partial\xi_k}\right)\right] = -4\pi\cdot\delta \;\; (k=1,\,2,\,3). \tag{2.46'}$$

и, в частности, в декартовых координатах

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -4\pi\cdot\delta. \tag{2.46''}$$

Уравнение (2.46) эквивалентно системе уравнений (2.34). Для области V, в которой $\delta=0$, уравнение (2.46) превращается в уравнение Лапласа

$$\nabla^2 U = 0. \tag{2.46'''}$$

Таким образом, вместо трёх неизвестных f_x, f_y, f_z имеем одно искомое U, которое должно удовлетворять уравнению Пуассона – Лапласа.

V. Замечания

Сказанное о поле **f** в замечаниях, приведенных в § 2, дополним замечаниями о потенциале U этого поля.

1. В соответствии с $(2.20)_1$

$$U(a) = m_\Theta/L_{oa} \quad \text{при} \quad L_{oa} >> L_\Theta, \tag{2.47}$$

где масса m_Θ в области Θ определяется согласно $(2.20)_2$; L_Θ – максимальный линейный размер области Θ. За исключениями, указанными в замечании 6, § 2, потенциал убывает с расстоянием L_{oa}, как $1/L_{oa}$.

2. Условие постоянства во времени потенциала U, очевидно, совпадает с условием (2.7) постоянства поля **f**.

3. В случае поля плоской массы (рис. 2.6), определяемого формулой (2.23), имеем массы на бесконечности. Полагая $U=0$ при $z=0$, т. е. выбирая точку ϕ на плоскости $z=0$ и считая потенциал $U(\phi)=0$, имеем согласно (2.40)

$$U(z) = \int_z^0 f_z\,dz = 2\pi\cdot\sigma\cdot\int_z^0 \frac{z}{|z|}dz = -2\pi\cdot\sigma\cdot|z|. \tag{2.48}$$

В случае поля двух плоских масс (рис. 2.7), определяемого формулой (2.23''), положим опять $U=0$ при $z=0$, т. е. на средней плоскости между массами, и будем иметь в промежутке между ними, т. е. при $|z|<h/2$, согласно (2.40)

$$U(z) = \int_z^0 f_z\,dz = -4\pi\cdot\sigma\cdot\int_z^0 dz = 4\pi\cdot\sigma\cdot z. \tag{2.48'}$$

4. В случае однородного поля **f**, коллинеарного оси Z, получаем согласно (2.37')

$$dU/dz = -f_z, \qquad U = -f_z\cdot z + C, \quad \text{где} \quad f_z = \pm f, \tag{2.49}$$

а при произвольном направлении поля **f**

$$U = -f_x\cdot x - f_y\cdot y - f_z\cdot z + C. \tag{2.49'}$$

5. В поле прямой (рис. 2.8), определяемом формулой (2.27), имеем, полагая U=0 при $r=r_0$, согласно (2.39),

$$U(r) - U(r_0) = \int_r^{r_0} f_r\, dr = 2 \cdot \lambda \cdot \ln \frac{r_0}{r}. \qquad (2.50)$$

или, не определяя точку ϕ и потенциал $U(\phi)$,

$$\frac{dU}{dr} = -\frac{2 \cdot \lambda}{r}, \quad U(r) = -2 \cdot \lambda \cdot \int \frac{dr}{r} = 2 \cdot \lambda \cdot \ln \frac{C}{r}, \qquad (2.50')$$

где C – постоянная. Это выражение для потенциала U также справедливо в тех случаях, для которых согласно сказанному в конце § 2 справедливо соответствующее выражение (2.27) для поля **f**.

§ 5. ПОЛЕ НЕЙТРАЛЬНОЙ СОВОКУПНОСТИ МАСС

I. Поле диполя

Допустим, что в точках q_1 и q_2 прямой l находятся соответственно массы $m_1=-m$ и $m_2=m$, и пусть L_{12} – расстояние от точки q_1 до точки q_2, а q – точка, делящая пополам это расстояние (рис. 2.9). Потенциал U точки a в поле **f**, создаваемом совокупностью масс m_1 и m_2, согласно (2.44")$_1$ определяет формула

$$U(a) = m \cdot \left(\frac{1}{L_{2a}} - \frac{1}{L_{1a}} \right). \qquad (2.51)$$

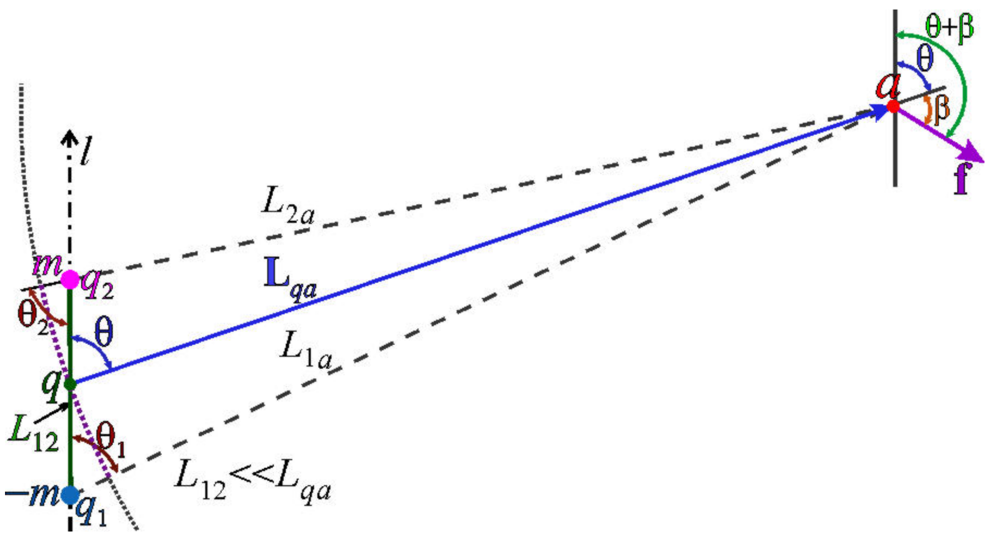

Рис. 2.9.
Диполь

Рассмотрим случай, когда расстояние $L_{12} \ll L_{qa}$, т. е. будем изучать поле на расстояниях от точки q, достаточно больших по сравнению с расстоянием между массами m_1 и m_2. При этих условиях совокупность масс m_1, m_2 называют *диполем*, а точки q_1 и q_2 – его *полюсами*. Иногда полюсами называют массы m_1 и m_2. Точку q будем называть центром диполя, расстояние L_{12} – его длиной, прямую l – его осью, а нормальную к оси l плоскость, проходящую через центр диполя, – его экваториальной плоскостью. *Полярность диполя* определяет указание знаков его полюсов.

Разность в скобках в (2.51) можно представить как приращение функции $1/L_{qa}$, соответствующее перемещению точки q по направлению l из точки q_1 в точку q_2 по отрезку $\mathbf{dl}=\mathbf{L}_{12}$, следовательно, согласно (1.11') и (1.127)$_2$

$$\frac{1}{L_{2a}}-\frac{1}{L_{1a}}=\left(\mathbf{L}_{12}\ \overset{q}{\mathrm{grad}}\frac{1}{L_{qa}}\right)=\left(\mathbf{L}_{12}\ \overset{q}{\nabla}\frac{1}{L_{qa}}\right)=\frac{\left(\mathbf{L}_{12}\ \mathbf{L}_{qa}\right)}{L_{qa}^3}. \qquad (2.52)$$

Таким образом, получаем из (2.51) для потенциала U поля $\mathbf{f}$, создаваемого диполем, выражения

$$U(a)=\left(\mathbf{L}_{12}\ \overset{q}{\nabla}\frac{m}{L_{qa}}\right), \qquad U(a)=\frac{\left(\mathbf{p}\ \mathbf{L}_{qa}\right)}{L_{qa}^3}. \qquad (2.53)$$

где

$$\mathbf{p}=m\cdot\mathbf{dl}=m\cdot\mathbf{L}_{12}, \qquad L_{12}\ll L_{qa}. \qquad (2.54)$$

Вектор $\mathbf{p}$, которым согласно (2.53)$_2$ полностью определяется поле диполя, называют *моментом диполя.*

В соответствии с (2.54) единицей момента электрического диполя является Кл·м, а магнитного – А·м^2. В этих единицах выражаются также дипольные моменты других нейтральных совокупностей масс.

Приведём другой вывод выражения (2.53)$_2$, не требующий дифференцирования функции $1/L_{qa}$. Пунктирной линией на рис. 2.9 показана дуга окружности с радиусом L_{qa} и с центром в точке a. Если $L_{12}\ll L_{qa}$, то можем принять допущение, что отрезки L_{qa}, L_{1a} и L_{2a} – взаимно параллельны. При этом можно (приближённо) полагать, что показанные на этом рисунке углы $\theta_1\approx\theta$, $\theta_2\approx\theta$, где θ – угол между радиус-векторами $\mathbf{L}_{12}$ и $\mathbf{L}_{qa}$. При этих условиях $L_{2a}\approx L_{qa}-\frac{L_{12}}{2}\cos\theta$, $L_{1a}\approx L_{qa}+\frac{L_{12}}{2}\cos\theta$. Тогда согласно (2.51) $U(a)\approx m\cdot\left(\frac{1}{L_{qa}-\frac{L_{12}}{2}\cos\theta}-\frac{1}{L_{qa}+\frac{L_{12}}{2}\cos\theta}\right)=m\cdot\left(\frac{\frac{L_{12}}{2}\cos\theta+\frac{L_{12}}{2}\cos\theta}{L_{qa}^2-\left(\frac{L_{12}}{2}\cos\theta\right)^2}\right)$. При $L_{12}\ll L_{qa}$ имеем $\left(\frac{L_{12}}{2}\cos\theta\right)^2\ll L_{qa}^2$ и (при $m>0$) потенциал $U(a)\approx\frac{m\,L_{12}}{L_{0a}^2}\cos\theta=\frac{p}{L_{0a}^2}\cos\theta$, где $p=m\cdot L_{12}=|m\cdot\mathbf{L}_{12}|=|\mathbf{p}|$. Отсюда следует выражение (2.53)$_2$ для потенциала U поля $\mathbf{f}$ диполя.

Для большей общности выводимых формул оставляем знак массы m неопределённым, т. е. оставляем нефиксированной полярность диполя. При $m>0$ вектор $\mathbf{p}$ так же, как и вектор $\mathbf{L}_{12}$, направлен от точки q_1 к точке q_2, а при $m<0$ он имеет противоположное направление. В том и другом случае он направлен в сторону положительной массы.

Абсолютная величина $|m|\cdot L_{12}$ момента диполя $\mathbf{p}$ равна произведению массы положительного полюса на длину L_{12} диполя. Она не изменится, если будем варьировать значения $|m|$ и L_{12} так, чтобы их произведение сохранялось неизменным. Но чем меньшим мы возьмем значение L_{12}, тем меньше будет окрестность Q точки q, в которой выражения (2.53) согласно

$(2.54)_2$ неприменимы. Чтобы её размеры свести к нулю и таким образом добиться применимости выражений (2.53) во всём пространстве, выберем из всех пар значений $|m|$ и L_{12}, произведения которых равны p, предельные значения этих величин

$$L_{12}\to 0, \quad |m| = p/L_{12}\to\infty. \qquad (2.55)$$

Введём сферическую систему координат R, θ, φ с началом в центре q диполя и с лучом $\theta = 0$ по направлению момента диполя. В этой системе имеем $L_{qa}=R$, угол $(\mathbf{p}, \mathbf{L}_{qa}) = \theta$ и, следовательно,

$$U(a) = \frac{(\mathbf{p}\ \mathbf{1}_R)}{R^2} = \frac{p}{R^2}\cdot\cos\theta. \qquad (2.56)$$

Из (2.56) легко получаем по формулам (2.37) и (1.13") выражения для скалярных компонент поля **f** диполя

$$f_R = -\frac{\partial U}{\partial R} = \frac{2p}{R^3}\cos\theta,\ \ f_\theta = -\frac{1}{R}\frac{\partial U}{\partial\theta} = \frac{p}{R^3}\sin\theta,\ \ f_\varphi = -\frac{1}{R\cdot\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi} = 0. \quad (2.57)$$

Вектор **f**, его абсолютную величину f и направление определяют формулы

$$\mathbf{f} = \frac{p}{R^3}\left(\mathbf{1}_R\cdot 2\cos\theta + \mathbf{1}_\theta\cdot\sin\theta\right), \quad f = \frac{p}{R^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta}, \qquad (2.57')$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{f_\theta}{f_R} = \frac{1}{2}\cdot\operatorname{tg}\theta, \quad \operatorname{tg}(\beta+\theta) = \frac{3\cdot\operatorname{tg}\theta}{2-\operatorname{tg}^2\theta}, \qquad (2.57'')$$

где β – угол отклонения вектора **f** от исходящего из центра q диполя луча, на котором находится точка a, а $\beta+\theta$ – угол отклонения вектора **f** от луча $\theta=0$, т. е. от направления $\mathbf{L}_{12}$ и момента **p** диполя (см. рис. 2.9).

Таким образом, в отличие от абсолютной величины f поля **f** точечной массы m, поле **f** диполя (величина f) убывает с расстоянием L_{qa} от него, как $1/L_{qa}^3$, а потенциал этого поля – как $1/L_{qa}^2$. Кроме того, напряжённость и потенциал поля диполя зависят от угла отклонения радиус-вектора $\mathbf{L}_{qa}$ от направления момента **p** диполя.

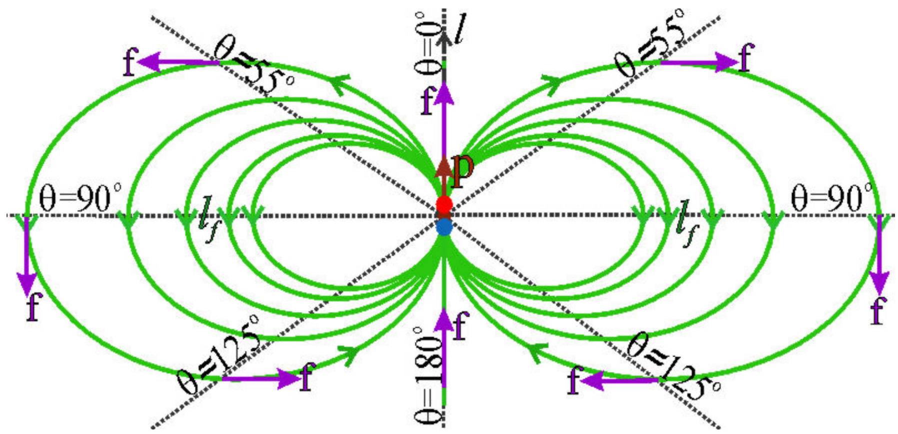

Рис. 2.10.
Векторные линии l_f и направления векторов **f** поля диполя

Из выражений (2.57) следует, что при tg θ=0, т. е. на оси l диполя, при θ=0° или θ=180°, направления векторов **f** – такие же, как направление момента **p** диполя (**f**||**p**). Если tg θ=$2^{1/2}$, то tg (β+θ)→∞, β+θ=90°, векторы **f** и **p** – взаимно ортогональны.

Значению tg $\theta=2^{1/2}$ соответствуют углы $\theta\approx55^{o}$ и $\theta\approx125^{o}$; при этих углах θ и любых расстояниях R до центра диполя векторы **f** и **p** взаимно ортогональны - $\mathbf{f}\perp\mathbf{p}$ (см. рис. 2.10). При $\theta=90^{o}$, в экваториальной плоскости диполя, компоненты $f_R=0$, $f_\theta=p/R^3>0$. Это означает, что направления **f** совпадают с направлениями ортов $\mathbf{1}_\theta$ в этой плоскости, т. е. векторы **f** и **p** имеют противоположные направления ($\mathbf{f}\uparrow\downarrow\mathbf{p}$).

II. Нейтральная совокупность точечных масс

Если совокупность масс состоит из нескольких диполей с моментами $\mathbf{p}_k$ (k=1, 2, ..., n), то аналогично $(2.53)_2$ имеем

$$U(a)=\frac{(\mathbf{M}\ \mathbf{L}_{qa})}{L_{qa}^3},\quad \mathbf{M}=\sum\mathbf{p}_k. \tag{2.58}$$

где $\mathbf{M}=\Sigma\mathbf{p}_k$ – дипольный момент совокупности масс; q – точка в достаточно малой окрестности Q, в которой находятся массы. Если в этой окрестности находится очень много диполей и они расположены в ней хаотично (в равномерном беспорядке), то согласно $(2.58)_2$ $\mathbf{M}=0$. Поэтому дипольный момент совокупности диполей можно рассматривать как некоторую меру её упорядочения, т. е. существования в ней преимущественного направления дипольных моментов $\mathbf{p}_k$ (по числу и величине). Впоследствии увидим, что такое упорядочение может возникнуть под влиянием поля.

Каждая совокупность точечных масс m_i (i=l, 2, 3, ..., N) при $\Sigma m_i=0$ может быть представлена как совокупность диполей. Например, если заданы три массы $m_1=-m$, $m_2=2m$, $m_3=-m$, то, разбивая мысленно массу m_2 на массы $m_2'=m$ и $m_2''=m$, получаем два диполя: m_1, m_2' и m_3, m_2''. Таким образом, формулы (2.58) применимы и в общем случае нейтральной совокупности точечных масс, причём момент **M** равен сумме моментов $\mathbf{p}_k$ диполей, к которым сводится совокупность масс. Однако можно обойтись без перехода от точечных масс к диполям. Суммируя потенциалы полей точечных масс m_i, можно получить выражение $(2.58)_1$ с другим, но равносильным $(2.58)_2$ определением дипольного момента **M** (см. [Альпин, 1966], с. 174):

$$\mathbf{M}=\sum m_i\cdot\mathbf{L}_{qi},\quad \sum m_i=0, \tag{2.59}$$

где $\mathbf{L}_{qi}$ – радиус-вектор с абсолютной величиной L_{qi}, равной расстоянию от точки q до массы m_i. Правая часть $(2.59)_1$ не зависит от выбора точки q в силу равенства $(2.59)_2$.

Так, например, в случае диполя при положении точки q, показанном на рис. 2.9, имеем $\mathbf{L}_{q1}=-\mathbf{L}_{12}/2$, $\mathbf{L}_{q2}=\mathbf{L}_{12}/2$, $\mathbf{M}=-\frac{1}{2}\mathbf{L}_{12}\cdot(-m)+\frac{1}{2}\mathbf{L}_{12}\cdot m=\mathbf{L}_{12}\cdot m=\mathbf{p}$.

Дипольный момент является мерой сдвигов положительных масс нейтральной совокупности относительно её отрицательных масс; его направление определяет среднее направление этих сдвигов, а его абсолютная величина характеризует эти сдвиги произведением количества сдвинутых масс на среднее значение их сдвигов.

III. Двойной слой

Представим себе две поверхности S_1 и S_2, расположенные с обеих сторон некоторой поверхности S на малых расстояниях $L_{12}/2$ от неё, отсчитываемых по нормалям n к ней (рис. 2.11). Каждой точке q поверхности S соответствуют на поверхностях S_1 и S_2 точки *1* и *2*, находящиеся на одной нормали с точкой q. Допустим, что на поверхностях S_1 и S_2 расположены поверхностные массы m_1 и m_2 с плотностями $\sigma_1=-\sigma$ и $\sigma_2=\sigma$ в точках *1* и *2*. Такая совокупность поверхностных масс представляет собой *двойной слой*, находящийся на поверхности S.

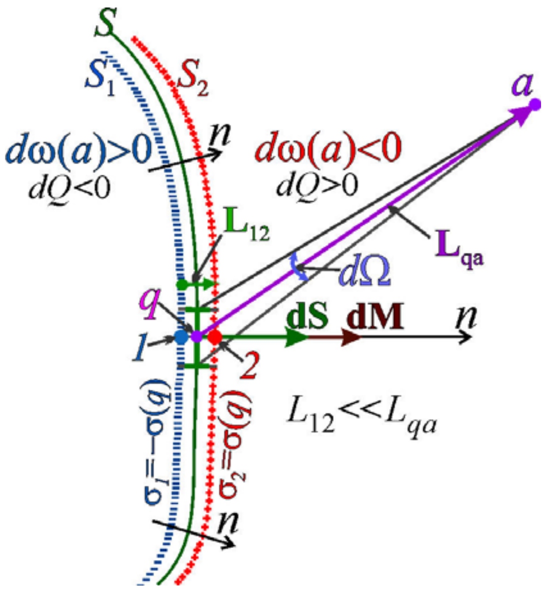

Рис. 2.11.
Двойной слой

Двойной магнитный слой называют *магнитным листком*.

В отличие от двойного слоя отдельно взятую поверхностную массу (с поверхностной плотностью σ) называют иногда ординарным, *простым слоем*.

Поверхности S_1 и S_2 – стороны двойного слоя с массами m_1 и m_2 будем называть его обкладками, а расстояние L_{12} между ними – его толщиной. Пусть dS – элемент поверхности S с центром в точке q, а dS_1 и dS_2 – элементы поверхностей S_1 и S_2 (с центрами *1* и *2*), являющиеся проекциями элемента dS. Совокупность масс

$$dm_1=\sigma_1\cdot dS_1=-\sigma\cdot dS \quad \text{и} \quad dm_2=\sigma_2\cdot dS_2=\sigma\cdot dS \tag{2.60}$$

площадок dS_1 и dS_2 образует элемент двойного слоя с центром в точке q и создаёт в соответствии с (2.51) и (2.52) поле **df** с потенциалом в точке a:

$$dU(a)=dm_2\cdot\left(\frac{1}{L_{2a}}-\frac{1}{L_{1a}}\right)=\sigma\cdot dS\cdot\frac{(\mathbf{L}_{12}\ \mathbf{L}_{qa})}{L_{qa}^3}=\sigma\cdot L_{12}\cdot\frac{(\mathbf{dS}\ \mathbf{L}_{qa})}{L_{qa}^3}. \tag{2.60'}$$

где $\mathbf{dS}=\mathbf{n}\cdot dS=\mathbf{1}_n\cdot dS$; n – нормаль к S, направленная от S_1 к S_2.

Вектор

$$\mathbf{dM}=dm_2\cdot\mathbf{L}_{12}=\sigma\cdot\mathbf{L}_{12}\cdot dS=\mathbf{n}\cdot\sigma\cdot L_{12}\cdot dS, \tag{2.61}$$

аналогичный вектору **p** (моменту диполя), является дипольным моментом элемента dS двойного слоя; он параллелен вектору $\mathbf{L}_{12}$, когда $\sigma>0$, и при любом знаке σ направлен от отрицательной обкладки двойного слоя к его положительной обкладке. Согласно (2.61)

$$\frac{(\mathbf{n}\ \mathbf{dM})}{dS}=\sigma\cdot L_{12}=\eta_{12}, \qquad \mathbf{dM}=\eta_{12}\cdot\mathbf{dS}, \tag{2.62}$$

где η_{12} – (поверхностная) плотность дипольных моментов двойного слоя; $\eta_{12}>0$ и $\eta_{12}<0$ соответственно при $\sigma>0$ и $\sigma<0$. Из (2.60') согласно (2.62), (1.128'') имеем для потенциала $dU(a)$ два выражения:

$$dU(a)=\frac{(\mathbf{dM}\ \mathbf{L}_{qa})}{L_{qa}^{3}},\quad dU(a)=-\eta_{12}\cdot d\omega,\tag{2.63}$$

где $d\omega=(\mathbf{dS}\ \mathbf{L}_{aq})/L_{aq}{}^{3}$ – угол видимости площадки dS из точки a, положительный, когда к точке a обращена сторона S_1 двойного слоя.

См. рис. 2.11, а также рис. В.13, рис. 1.15, на которых, правда, показаны углы видимости ориентированной площадки $\mathbf{dS}$ из точки q, а не из точки a.

Элемент двойного слоя можно представить как совокупность диполей, получившихся разбиением его на части системой нормальных к нему поверхностей. Величина $\mathbf{n}\cdot\eta_{12}$ представляет собой сумму моментов диполей, приходящихся на единицу площади двойного слоя.

Часто бывает удобно вместо алгебраической величины η_{12}, знак которой зависит от выбора знака σ и направления нормали n, пользоваться положительной величиной

$$\eta=|\eta_{12}|=dM/dS=|\sigma|\cdot L_{12}=\eta_{12}\cdot\operatorname{sgn}\sigma_2=\eta_{12}\cdot\sigma_2/|\sigma_2|,\tag{2.62'}$$

а вместо угла $d\omega$ со знаком, зависящим от произвольного выбора направления нормали n, применять угол dQ, знак которого связан с полярностью двойного слоя:

$$dQ=\frac{(-\mathbf{dS}^{\partial}\ \mathbf{L}_{aq})}{L_{aq}^{3}}=-\frac{(\mathbf{n}^{\partial}\ \mathbf{L}_{aq})}{L_{aq}^{3}}dS=-d\omega\cdot\operatorname{sgn}\sigma_2,\tag{2.64}$$

где $\mathbf{dS}^{\partial}$ и $\mathbf{n}^{\partial}$ – векторы, направленные от отрицательной обкладки двойного слоя к его положительной обкладке, т. е. по направлению дипольного момента $\mathbf{dM}$.

Согласно (2.64) угол dQ положителен, когда из точки a видна оборотная сторона площадки $-\mathbf{dS}^{\partial}$, т. е. лицевая сторона площадки $\mathbf{dS}^{\partial}=\mathbf{n}^{\partial}\cdot dS$. Следовательно, угол dQ положителен, когда к точке a обращена положительная обкладка двойного слоя: $dQ=-d\omega$ при $\sigma_2>0$ и $dQ=+d\omega$ при $\sigma_2<0$.

Применяя величины η и dQ, получаем вместо $(2.62)_2$, $(2.63)_2$

$$\mathbf{dM}=\eta\cdot\mathbf{dS}^{\partial}=\mathbf{n}^{\partial}\cdot\eta\cdot dS,\qquad dU(a)=\eta\cdot dQ.\tag{2.63'}$$

Согласно $(2.63')_2$ знак потенциала $dU(a)$ совпадает со знаком обкладки двойного слоя, обращенной к точке a. Такое же правило знаков следует из (2.63).

Из сказанного выше следует, что поле, создаваемое двойным слоем, расположенным на заданной поверхности, зависит от произведения $\sigma\cdot L_{12}=\eta_{12}$ и не изменится, если как угодно варьировать множители σ и L_{12}, но так, чтобы это произведение оставалось без изменения. Удобно полагать $L_{12}\to 0$, т. е. считать, что массы m_1 и m_2 расположены на сторонах S_1 и S_2 поверхности S и двойной слой не занимает объёма. При этом следует допустить, что

$$|\sigma|\to\infty\quad\text{как}\quad 1/L_{12}\quad\text{при}\quad L_{12}\to 0.\tag{2.65}$$

Величину η_{12} в общем случае следует считать функцией положения точки q на поверхности S, так как расстояние L_{12} между обкладками S_1 и S_2 и плотность σ (включая её знак) могут меняться по поверхности S. Однородным на каком-либо участке поверхности S называют двойной слой, если величина η_{12} имеет во всех точках этого участка одно и то же значение, иначе говоря, если на этом участке поверхности S двухмерный градиент $\mathrm{grad}^S\,\eta_{12}=0$.

Выражения для дипольного момента **M** двойного слоя получаются из $(2.62)_2$ интегрированием по поверхности S. В частности, для однородного двойного слоя получаем формулы

$$\mathbf{M} = \eta_{12}\cdot\int_S \mathbf{dS} = \eta\cdot\int_S \mathbf{dS}^\partial, \quad \mathbf{M} = \eta_{12}\cdot\mathbf{S} = \eta\cdot\mathbf{S}^\partial, \tag{2.61'}$$

из которых вторая соответствует случаю плоского однородного двойного слоя.

Согласно (2.63) получаем для потенциала U поля **f**, создаваемого двойным слоем, расположенным на поверхности S, выражения

$$U(a) = -\int_S \eta_{12}\, d\omega = \int_S \eta\, dQ = \int_S \frac{(\mathbf{dM}\ \mathbf{L}_{qa})}{L_{qa}^3}. \tag{2.66}$$

В случае однородного двойного слоя

$$U(a) = -\eta_{12}\cdot\omega = \eta\cdot Q, \tag{2.66'}$$

где ω и Q – углы видимости поверхности S из точки a, определяемые согласно (1.128") и (2.64) интегрированием.

Двойной круг радиуса $r_к$, лежащий в плоскости z=0 системы r, φ, z с осью Z, проходящей через центр круга и направленной по его дипольному моменту, создаёт на этой оси поле **f** с потенциалом $U(z)=\eta\cdot Q$, где $Q = 2\pi\cdot\left(1-|z|\Big/\sqrt{r_к^2+z^2}\right)\cdot(z/|z|)$ ([Альпин, 1971], с. 48). Следовательно, на этой оси поле

$$\mathbf{f}=\mathbf{1}_z\cdot f_z, \quad f_z=2\pi\cdot\eta\cdot r_к^{\,2}\cdot(r_к^{\,2}+z^2)^{-3/2}. \tag{2.66''}$$

Из полученных формул следует, что поле скаляра $U(a)$ в случае однородного двойного слоя отличается от полей углов видимости $\omega(a)$ и $Q(a)$ только постоянными (не зависящими от положений точек a и q) множителями $-\eta_{12}$ и η. Следовательно, от результатов, полученных в § 9 главы первой для поля углов $\omega(a)$, можно, перейти к аналогичным результатам для потенциала $U(a)$ поля $\mathbf{f}(a)$ однородного двойного слоя умножением углов $\omega(a)$ на $-\eta_{12}$ или переходом от углов $\omega(a)$ к углам $Q(a)$ и умножением последних на η. В соответствии с (1.129) имеем согласно (2.66') для потенциала $U(a)$ поля **f**, создаваемого замкнутым (или «почти замкнутым», см. выражения (1.129) в разделе II, § 9 главы первой) однородным двойным слоем, выражения

$$U^i(a)=-4\pi\cdot\eta_{ie}=4\pi\cdot\eta\cdot\mathrm{sgn}\,\sigma_i, \quad U^e(a)=0. \tag{2.67}$$

В случае однородного двойного слоя, простирающегося до бесконечности, имеем в соответствии с (1.129') в областях V_1 и V_2, разделяемых двойным слоем, потенциалы (см. рис. 1.16)

$$U^{(2)}(a)=+\omega^\alpha\cdot\eta_{12}, \quad U^{(1)}(a)=-\omega^\beta\cdot\eta_{12}. \tag{2.67'}$$

где ω^α и ω^β – углы видимости из любой точки частей бесконечно удалённой поверхности (с внешней нормалью), принадлежащих областям V_1 и V_2.

В любом случае неограниченного однородного двойного слоя (замкнутого или простирающегося до бесконечности) потенциал в пределах каждой из областей, разделяемых двойным слоем, не зависит от положения точки наблюдения. Следовательно, во всём пространстве поле $\mathbf{f}=-\mathrm{grad}\,U$, создаваемое таким двойным слоем, равно нулю за исключением поверхности S, несущей двойной слой, на которой потенциал терпит разрыв и его градиент теряет смысл (см. § 7). В случае неограниченного плоского однородного двойного слоя (см. рис. 2.12, *а*, а также рис. В.14 в разделе "Введение" в Части I) имеем в соответствии с (1.129'')

$$U^{(1)}(a)=-2\pi\cdot\eta_{12}, \qquad U^{(2)}(a)=2\pi\cdot\eta_{12}. \tag{2.68}$$

В случае плоского однородного двойного слоя, занимающего участок S плоскости Π, ограниченный контуром l, формулы (2.68) в соответствии с (1.130) справедливы для области V (с обеих сторон плоскости Π), в пределах которой любая точка a имеет на плоскости Π проекцию p, расположенную внутри контура l, причём расстояние $L_{ap} \ll L_{al}$, где L_{al} – наименьшее расстояние от точки a до контура l. Неограниченный плоский однородный двойной слой имеет предельный смысл. Подразумевается, что контур l имеет очень большие размеры и поэтому область V, для которой справедливы формулы (2.68), очень обширна. При любых размерах однородного плоского двойного слоя и, в частности, для элементарного двойного слоя, занимающего площадку dS (рис. 2.12, *б*), имеем в соответствии с (1.130') аналогично (2.22)

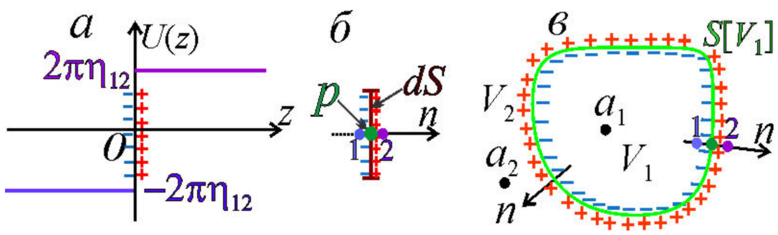

Рис. 2.12.
Однородные двойные слои:
в плоскости z=0 (*а*), на площадке dS (*б*), на замкнутой поверхности $S[V_1]$ (*в*)

$$U^{(1)}(p)=-2\pi\cdot\eta_{12}(p), \quad U(p)=0, \quad U^{(2)}(p)=2\pi\cdot\eta_{12}(p), \tag{2.69}$$

где $U^{(1)}(p)$ и $U^{(2)}(p)$ – значения потенциала U у точки p плоскости Π на её сторонах, обращённых к областям V_1 и V_2, а $U(p)$ – его значение в точке, принадлежащей самой плоскости Π.

Пусть S – поверхность, опирающаяся на контур l и несущая однородный двойной слой с плотностью дипольных моментов η_{12}. Переместим эту поверхность (с двойным слоем) из одного положения в другое, не меняя формы, размеров и положения её контура l и плотности дипольных моментов двойного слоя. Обозначая через S' и S'' поверхность S в двух её положениях, а через U' и U'' – значения потенциала U в точке a, соответствующие полям, создаваемым двойным слоем при этих его положениях, имеем согласно (1.132')

$$U''(a)-U'(a)=\begin{cases}\mp 4\pi\cdot\eta_{12} \text{ внутри } \Delta V,\\ 0 \qquad\quad \text{вне } \Delta V,\end{cases} \tag{2.70}$$

где ΔV – область, пространства, расположенная между поверхностями S' и S''; знак плюс соответствует случаю, когда нормаль n к поверхности S направлена от S'' к S'. Следовательно, потенциалы полей всех опирающихся на один контур l однородных двойных слоёв с одинаковыми плотностями дипольных моментов η_{12} совпадают с точностью до постоянного слагаемого $\mp 4\pi\cdot\eta_{12}$. Перемещая, однородный двойной слой, опирающийся на фиксированный контур l, мы нигде не меняем напряжённости поля $\mathbf{f}$. Потенциал U получает приращение $\mp 4\pi\cdot\eta_{12}$ во всех точках той области пространства, через которую перешёл двойной слой, причём знак минус имеем, когда перемещение происходит в ту сторону, куда направлена нормаль n, а знак плюс – когда оно происходит в противоположную сторону. Из полученных формул следует, что на двойном слое потенциал терпит разрыв (см. § 7).

В примере на рис. 2.12, *в* однородный двойной слой лежит на замкнутой поверхности $S[V_1]$, ограничивающей область пространства V_1. К области V_1 обращена отрицательная обкладка двойного слоя. Угол видимости ω поверхности $S[V_1]$ из любой точки a_1 области V_1 равен 4π. Угол видимости этой поверхности из любой точки a_2 области V_2 равен нулю (см. рис. В.14, *г*, в разделе "Введение" в Части I). Поэтому из (2.66') для потенциалов в этих точках получаем: $U(a_1)=-4\pi\cdot\eta_{12}$, $U(a_2)=0$. Так как $\mathbf{f}=-\operatorname{grad} U$, а градиент однородного скалярного поля равен нулю, в областях V_1, V_2 поле $\mathbf{f}=0$. То есть однородный двойной слой, лежащий на замкнутой поверхности $S[V_1]$, не создаёт поля $\mathbf{f}$ в областях V_1, V_2. Поле $\mathbf{f}$ существует только между обкладками двойного слоя.

IV. Дипольная линия

Аналогично диполю и двойному слою вводится дипольная линия (линейный диполь) – совокупность двух линейных масс с плотностями $-\lambda$ и λ, расположенных на линиях l_1 и l_2 с двух противоположных сторон от линии l, вблизи неё. Элемент длины дипольной линии состоит из двух параллельных отрезков dl_1 и dl_2 длиной dl, на которых имеются массы $dm_1=-\lambda\cdot dl$ и $dm_2=\lambda\cdot dl$. Его дипольный момент $\mathbf{dM}$ и плотность дипольных моментов η^λ при $\lambda>0$ определяют формулы

$$\mathbf{dM}=\lambda\cdot\mathbf{L}_{12}\cdot dl=\mathbf{n}\cdot\eta^\lambda\cdot dl, \qquad \eta^\lambda=\lambda\cdot L_{12}, \tag{2.71}$$

а создаваемое им поле $\mathbf{f}$ имеет потенциал

$$dU(a)=\frac{(\mathbf{dM}\ \mathbf{L}_{qa})}{L_{qa}^3}=\eta^\lambda\cdot\frac{(\mathbf{n}\ \mathbf{L}_{qa})}{L_{qa}^3}\cdot dl, \tag{2.72}$$

где q – точка на линии l; n – нормаль к этой линии в точке q, направленная к линии l_2, а $\mathbf{n}$ – единичная нормаль по направлению n; L_{12} – расстояние от l_1 до l_2 по нормали n. В случае неограниченной прямой однородной (η^λ=const) дипольной линии l

$$U(a) = 2 \cdot \eta^{\lambda} \cdot \frac{(\mathbf{n}\ \mathbf{r})}{r^2} = 2 \cdot \eta^{\lambda} \cdot \frac{\cos\varphi}{r}; \qquad (2.73)$$

здесь r и φ – координаты точки a в системе r, φ, z с осью Z по линии l с началом (r=0, z=0) в точке q и с отсчётом угла φ в плоскости z=0 от направления вектора **n**. Формула (2.73) так же, как формула (2.50'), справедлива тогда, когда применима формула (2.27).

В присутствии диполей, двойных слоёв и двойных линий правая часть (2.45) должна быть дополнена суммой потенциалов их полей:

$$U^D(a) = \sum \frac{(\mathbf{p}\ \mathbf{L}_{qa})}{L_{qa}^3} - \int_S \eta_{12}\, d\omega + \int_l \eta^{\lambda} \cdot \frac{(\mathbf{n}\ \mathbf{L}_{qa})}{L_{qa}^3}\, dl. \qquad (2.74)$$

V. Квадруполь

Вернёмся к нейтральной совокупности точечных масс и рассмотрим случай, когда её дипольный момент равен нулю. Допустим, что в точках q_1 и q_2 прямой l находятся два диполя: D_1 и D_2 с моментами $\mathbf{p}^{(1)}=-\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}^{(2)}=\mathbf{p}$ и пусть L_{12} – расстояние от точки q_1 до точки q_2 по направлению прямой l (рис. 2.13, *а*). Если расстояние L_{12} достаточно мало по сравнению с расстояниями L_{qa} от средней точки q отрезка L_{12} до точек a, в которых мы изучаем поле, создаваемое диполями D_1 и D_2, то совокупность этих диполей называют *квадруполем*. В частности, четыре одинаковые по абсолютной величине точечные массы, находящиеся в вершинах достаточно малого параллелограмма, образуют квадруполь, если массы (заряды) на концах одной из его диагоналей положительны, а на концах другой – отрицательны (см. рис. 2.13, *б*).

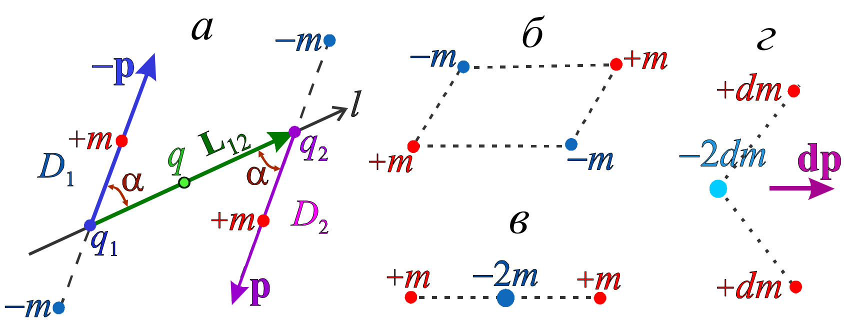

Рис. 2.13.

Квадруполь: поверхностный при sin α≠0 (*а*, *б*) и линейный при sin α=0 (*в*)

Очевидно, что моменты $\mathbf{p}^{(1)}$ и $\mathbf{p}^{(2)}$ диполей, составляющих квадруполь, антипараллельны, но в общем случае их оси не совпадают. Если они совпадают, то квадруполь называют линейным (пример - на рис. 2.13, *в*).

Потенциал $U^{\text{кв}}(a)$ поля квадруполя равен алгебраической сумме потенциалов полей, создаваемых диполями D_1 и D_2, и, следовательно, согласно $(2.53)_2$,

$$U^{\text{кв}}(a) = \left(\mathbf{p}^{(1)}\ \frac{\mathbf{L}_{1a}}{L_{1a}^3}\right) + \left(\mathbf{p}^{(2)}\ \frac{\mathbf{L}_{2a}}{L_{2a}^3}\right) = \left(\mathbf{p}\ \frac{\mathbf{L}_{2a}}{L_{2a}^3}\right) - \left(\mathbf{p}\ \frac{\mathbf{L}_{1a}}{L_{1a}^3}\right).$$

Полученную разность можно рассматривать как приращение

$$\left(\mathbf{p}\,\frac{\mathbf{L}_{qa}}{L_{qa}^{3}}\right)'' - \left(\mathbf{p}\,\frac{\mathbf{L}_{qa}}{L_{qa}^{3}}\right)' = \frac{\partial}{\partial l}\left(\mathbf{p}\,\frac{\mathbf{L}_{qa}}{L_{qa}^{3}}\right) dl$$

потенциала $U^D(a)$ поля диполя D с моментом $\mathbf{p}$, находящегося в точке q, соответствующее перемещению $dl{=}L_{12}$ этой точки от точки q_1 до точки q_2. Следовательно,

$$U^{\text{кв}}(a) = dl \cdot \overset{q}{\nabla}_l\left(\mathbf{p}\,\frac{\mathbf{L}_{qa}}{L_{qa}^{3}}\right) = \left(\mathbf{dl}\,\overset{q}{\nabla}\left(\mathbf{p}\,\frac{\mathbf{L}_{qa}}{L_{qa}^{3}}\right)\right). \qquad (2.75)$$

Об операторе $\overset{q}{\nabla}$ сказано в разделе I § 9 главы первой. В (2.75) $\overset{q}{\nabla}_l T = \overset{q}{\text{grad}}_l T$ – скалярная компонента вектора $\overset{q}{\text{grad}}\,T$ по направлению l.

На рис. 2.13, *г* схематично показана электрическая модель "свободной" молекулы воды (H_2O). На больших расстояниях от такой молекулы по сравнению с её размерами электрическое поле - сумма полей диполя с моментом **dp** и квадруполя. Но поле квадруполя быстрее, чем поле диполя, убывает при увеличении расстояния L_{qa}.

VI. Замечания

1. Полюс (отдельная точечная масса), диполь, квадруполь – *мультиполи* соответственно нулевого, первого и второго порядков. Выше мы перешли от полюса к диполю, составленному из точечных масс, сумма которых равна нулю; его поле отлично от нуля благодаря сдвигу массы одного знака относительно массы противоположного знака. Мы перешли от диполя к квадруполю, составленному из диполей, сумма моментов которых равна нулю; его поле отлично от нуля благодаря сдвигу диполя с моментом одного направления относительно диполя с моментом противоположного направления. Продолжая этот процесс, можно аналогично получить выражения для потенциалов полей мультиполей более высоких порядков. При этом легко заметить, что с повышением порядка мультиполя на единицу также на единицу увеличивается кратность дифференциальной операции $\overset{q}{\nabla}$ и, следовательно, показатель степени обратного расстояния ($1/L_{qa}$), которой пропорционален потенциал. Таким образом, с повышением порядка мультиполя сильно возрастает быстрота (интенсивность) ослабления (уменьшения абсолютной величины) его поля с расстоянием от него.

2. Можно себе представить также нейтральную совокупность объёмных масс с дипольным моментом **M**. Допустим, например, что две одинаковые (по форме и размерам) массы с плотностями $\delta_1{=}-\delta$ и $\delta_2{=}\delta$ занимают одну и ту же область V. Если одну из этих масс сдвинуть относительно другой на малое расстояние L_{12}, то каждая пара соответствующих элементов $dm_1{=}-\delta{\cdot}dV$ и $dm_2{=}\delta{\cdot}dV$ этих масс, взаимно раздвинутых на расстояние L_{12}, образует диполь с моментом $\mathbf{dM}{=}\delta{\cdot}\mathbf{L}_{12}{\cdot}dV$, а вся совокупность объёмных масс приобретает дипольный момент, равный сумме дипольных моментов, соответствующих элементам объёма dV.

§ 6. О РАСЧЁТЕ ПОЛЯ ЗАДАННЫХ МАСС

Различаем две постановки задачи определения кулонова поля по заданным массам: **1)** заданы все массы, создающие поле; **2)** заданы только массы, находящиеся в части пространства, в которой надо определить поле. Здесь будет идти речь об этой задаче в первой её постановке. О второй постановке задачи будет сказано в § 8 этой главы.

Порядок расчёта (при первой постановке) может быть двояким. Можно определить потенциал U, затем перейти к полю **f** (к его компонентам) дифференцированием функции U в соответствии с формулами (2.35) – (2.37'). Можно, наоборот, определить поле **f** и перейти к потенциалу U интегрированием согласно (2.40) – (2.42).

Определить потенциал U или напряжённость **f** можно тремя способами: ***а)*** непосредственным суммированием полей по формуле (2.12) или потенциалов по формуле (2.45) с соответствующими дополнениями $U^D(a)$, $U^{кв}(a)$,... (см. раздел V, § 5); ***б)*** решением дифференциального уравнения $(2.34)_2$ или (2.46); ***в)*** применением интегральных форм (2.30) или (2.43) этого уравнения, т. е. закона (теоремы) Гаусса.

При любой постановке задачи и любом способе её решения надо учесть симметрию поля, речь о которой будет идти ниже, и нарушения непрерывности поля, о которых будет сказано в следующем параграфе.

I. Поле симметричной массы

Симметрия поля, создаваемого массами, определяется их симметрией, Если поле $\delta(q)$ с его особыми точками, линиями и поверхностями отличается симметрией какого-либо вида (см. раздел III § 9 главы первой), то поля $\mathbf{f}(a)$ и $U(a)$ обладают соответствующей симметрией ([Альпин, 1966], с. 148 – 149). Например, если массы отличаются чётной симметрией относительно плоскости z=0 системы r, φ, z, то потенциал и тангенциальная компонента вектора **f** чётно−симметричны, а нормальная компонента **f** нечётно−симметрична относительно этой же плоскости.

Отметим обстоятельства, облегчающие расчёт симметричного поля.

Симметрия позволяет заранее получить полезные при расчёте поля сведения о его поведении в некоторых точках пространства.

1. На плоскости *чётной симметрии масс* (без инверсии знаков) имеем

$$U^{(2)}=U^{(1)},\quad f_t^{(2)}=f_t^{(1)},\quad f_n^{(2)}=-f_n^{(1)},\quad f_n^{(2)}-f_n^{(1)}=2\cdot f_n^{(2)}. \tag{2.76}$$

На такой поверхности (там, где на ней нет точечных или линейных масс) потенциал U и тангенциальная компонента f_t поля **f** непрерывны, а нормальная его компонента f_n равна нулю или терпит разрыв, равый $2\cdot f_n^{(2)}$ (там, где на плоскости симметрии имеется поверхностная масса в виде простого слоя с плотностью σ, см. § 7).

2. На плоскости *нечётной симметрии масс* имеем:

$$U^{(2)}=-U^{(1)},\quad f_n^{(2)}=f_n^{(1)},\quad f_t^{(2)}=-f_t^{(1)},$$

$$U^{(2)}-U^{(1)}=2\cdot U^{(2)}, \qquad f_t^{(2)}-f_t^{(1)}=2\cdot f_t^{(2)}. \qquad (2.77)$$

Здесь U – разность $U_a-U_ф$, где $U_ф$ – потенциал плоскости симметрии.

На такой плоскости (там, где на ней нет точечных или линейных масс) нормальная компонента f_n поля **f** непрерывна, а потенциал U и тангенциальная компонента f_t поля **f** равны нулю или терпят разрывы, равные соответственно $2\cdot U^{(2)}$ и $2\cdot f_t^{(2)}$ (там, где на плоскости симметрии имеется двойной слой, причём разрыв компоненты f_t обращается в нуль, когда этот слой однороден по направлению t; см. § 7).

3. Масса, цилиндрически симметричная относительно некоторой прямой, создаёт поле **f** с чётной цилиндрической симметрией относительно этой прямой.

4. На оси *цилиндрической симметрии масс* (там, где на ней нет точечных или линейных масс) тангенциальная к ней компонента поля **f** и его потенциал непрерывны, а нормальная к ней компонента поля равна нулю (см. рис. 1.18, *а*).

При цилиндрической симметрии масс векторные линии l_f лежат в плоскостях, проходящих через ось симметрии, а эквипотенциальные поверхности представляют собой поверхности вращения около этой оси.

5. В центре *сферической симметрии масс* потенциал U непрерывен, а напряжённость поля **f** равна нулю (см. рис. 1.18, *в*), но они обращаются в бесконечность в центре симметрии, если там находится точечная масса.

Симметрия заданной массы позволяет соответствующим подбором системы координат уменьшить число неизвестных компонент f_k поля **f** и аргументов ξ_k искомых функций U и f_k.

В частности, очень легко рассчитать: *а*) поле, создаваемое сферически симметричной массой; *б*) поле цилиндрически симметричной массы, неограниченной и однородной по направлению оси симметрии; *в*) поле массы, чётно-симметричной относительно некоторой плоскости, если она неограниченна и однородна по всем направлениям, параллельным этой плоскости. В каждом из этих случаев (эквипотенциальные) поверхности S^f являются поверхностями равных значений нормальной к ним компоненты f_n поля **f**. Пусть S_a – замкнутая поверхность, состоящая из поверхностей $S^f{}_a$ и S^0, из которых первая – поверхность S^f, проходящая через точку a, а вторая – векторная поверхность (на которой f_n=0). На $S^f{}_a$ скалярное произведение $(\mathbf{f}\,d\mathbf{S})=f_n\cdot dS=f\cdot dS$, так как на этой поверхности компонента f_t=0.

В первом из указанных выше случаев симметрии поля можно в качестве поверхности S_a (и $S^f{}_a$) брать сферическую поверхность с центром в центре симметрии. Во втором случае можно в качестве S_a взять поверхность прямого кругового цилиндра с осью по оси симметрии, причём $S^f{}_a$ – боковая поверхность этого цилиндра, а S^0 – совокупность его оснований. В третьем случае поверхностью S_a может служить поверхность прямого, цилиндра с образующей, нормальной к плоскости симметрии, и с основаниями, симметричными относительно этой плоскости, причём поверхностью $S^f{}_a$ является совокупность этих оснований, а поверхностью S^0 – боковая поверхность цилиндра.

Поток вектора **f** через поверхность $S^f{}_a$, очевидно, равен $f_n(a)\cdot S^f{}_a=f(a)\cdot S^f{}_a$, где $S^f{}_a$ – площадь поверхности $S^f{}_a$, а n – наружная нормаль. Если $m(a)$ – часть массы, создающей поле, заключённая внутри поверхности S_a, то согласно закону Гаусса (2.30) $f_n(a)\cdot S^f{}_a=m(a)$,

$$f_n(a)=\frac{4\pi\cdot m(a)}{S_a^f},\quad m(a)=\int_0^a S_{a'}^f\cdot\delta\, dl,\qquad (2.78)$$

где интегрирование производится по координатной линии, совпадающей с векторной линией l^f, а штрих при a (обозначение a') имеет такое же назначение как в (2.44). От компоненты f_n, являющейся функцией одной координаты, нетрудно перейти к потенциалу U согласно (2.40).

Для сферически симметричной массы в системе R, θ, φ с центром в центре симметрии: $dl=dR$, $f_n(a)=f_R(R_a)$, $S^f{}_a=4\pi\cdot R_a{}^2$, $S^f{}_{a'}=4\pi\cdot R^2$, а масса $m(a)$ получается интегрированием по R функции $4\pi\cdot\delta(R)\cdot R^2$ от нуля до R_a.

Для указанной выше цилиндрически симметричной массы в системе r, φ, z с осью Z по оси симметрии: $dl=dr$, $f_n(a)=f_r(r_a)$, $S^f{}_a=2\pi\cdot h\cdot r_a$, $S^f{}_{a'}=2\pi\cdot h\cdot r$, где h – произвольно взятая высота прямого кругового цилиндра. Масса $m(a)$ определяется интегрированием по r функции $2\pi\cdot h\cdot\delta(r)\cdot r$ от нуля до r.

Для указанной выше зеркально симметричной массы в системе x, y, z с плоскостью симметрии $z=0$: $dl=dz$, $f_n(a)=f_z(z_a)$, $S^f{}_a=S^f{}_{a'}=2\cdot S$, где S – площадь произвольно взятого поперечного сечения цилиндра. Масса $m(a)$ определяется интегрированием по z функции $2\cdot S\cdot\delta(z)$ от нуля до z_a.

II. Применение уравнения (2.32)

Описанный способ расчёта симметричных полей, основанный на применении интегральной формы (2.30) второго уравнения поля, отличается большой наглядностью. Но более простым является излагаемый ниже способ расчёта тех же симметричных полей, основанный на применении дифференциальной формы (2.32) второго уравнения поля **f**. Для указанных выше трёх случаев (благодаря обращению в нуль двух компонент поля и вследствие независимости третьей компоненты поля **f** от двух координат) дифференциальное уравнение в частных производных превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение с одной неизвестной функцией одного аргумента (координаты) ξ_m:

$$\frac{1}{h_1\cdot h_2\cdot h_3}\cdot\frac{d}{d\xi_m}\left(\frac{h_1\cdot h_2\cdot h_3}{h_m}\cdot f_m\right)=4\pi\cdot\delta(\xi_m).\qquad (2.79)$$

Это уравнение сразу сводится к квадратуре, после выполнения которой нетрудно, исходя из (2.37), определить потенциал. Таким образом,

$$\frac{h_1\cdot h_2\cdot h_3}{h_m}f_m=4\pi\int\delta(\xi_m)\cdot h_1\cdot h_2\cdot h_3\; d\xi_m,$$

$$U=-\int h_m\cdot f_m\; d\xi_m.\qquad (2.79')$$

Появляющиеся при двукратном интегрировании аддитивные постоянные (слагаемые) C и C' определяются значениями f_m при $\xi_m=0$ и U в точке *ф*. Если функция $\delta(\xi_m)$ представлена различными аналитическими выражениями для разных областей пространства V_μ ($\mu=1, 2, 3,..., N$), т. е. для разных интервалов изменения координаты ξ_m, то для каждой из этих областей в отдельности составляется уравнение (2.79) и получаются выражения (2.79'). При этом появляется дополнительно $2N-2$ постоянных интегрирования C и C', для определения которых служат условия для f_m и U на $N-1$ границах между областями V_μ (см. § 7).

Изложенные здесь способы расчёта пригодны и в тех случаях, когда совокупность масс, создающих поле, содержит необъёмные массы или состоит только из таких масс. Но при определении аддитивных постоянных надо учесть поведение поля **f** и его потенциала U у таких масс (см. § 7).

III. Логарифмический потенциал

Допустим, что массы распределены одинаково во всех плоскостях, нормальных к некоторой оси (прямой) l. Такие массы создают плоское поле **f**. Для определённости допустим, что задана объёмная масса с плотностью $\delta=\delta(r,\ \varphi)$ или $\delta(x,\ y)$ в системе r, φ, z, или x, y, z с осью Z по оси l. Этому двухмерному (плоскому) полю скаляра δ соответствует плоское поле **f**, в котором компонента $f_z=0$, а f_r, f_φ, f_x и f_y не зависят от z. Определим потенциал U этого поля. Разобьём массу на цилиндры (столбики) с элементарными поперечными сечениями dS в плоскостях z=const, с образующими, параллельными оси Z, и с массами $\lambda=\delta\cdot dS$ на единицу высоты. Тогда согласно (2.50′) имеем с точностью до аддитивной постоянной

$$U(a) = -2\cdot\int_S \delta\cdot\ln L_{qa}\,dS\,,\quad U(a) = -2\cdot\delta\cdot\int_S \ln L_{qa}\,dS, \tag{2.80}$$

где S – плоскость z=const или её участок, а L_{qa} – расстояние в этой плоскости от элементарного цилиндра до точки a. Второе выражение (2.80) соответствует случаю однородной массы. Таким образом, плоское поле **f** имеет логарифмический потенциал, т. е. потенциал, определяемый согласно (2.80).

§ 7. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ПОЛЯ И ЕЁ НАРУШЕНИЯ

Из общих выражений (2.12) и (2.45) для поля, создаваемого массами, видно, что всюду вне масс напряжённость **f** и потенциал U этого поля непрерывны. Бесконечно малому перемещению точки a соответствуют бесконечно малые приращения расстояний L_{qa} и, следовательно, также бесконечно малые изменения величин f_k и U. Но когда точка a совпадает с какой-либо из точек q, находящихся на границе массы или внутри неё, то $L_{qa}=0$, $1/L_{qa}=\infty$ и, казалось бы, согласно указанным выражениям для компонент f_k и потенциала U эти величины должны терпеть разрывы, принимая неограниченные значения.

I. Поле у точечной массы и в объёмной массе

У точечной массы m_q величины f и U согласно $(2.14)_1$ и $(2.44')_1$ действительно терпят разрывы. Когда точка a проходит через точечную массу m_q по некоторому направлению l, величины $|U|$ и f обращаются в бесконечность, а компонента f_l, кроме того, меняет знак. Но, с другой стороны, расчёты полей симметричных масс по способам, описанным в § 6, показывают, что величины U и f внутри объёмных масс и на их границах непрерывны.

Для количественной иллюстрации непрерывности поля $\mathbf{f}$ в области, занятой объёмной массой, можно выделить из неё шарик с центром в точке q и представить поле $\mathbf{f}$ в виде суммы полей $\mathbf{f}^{ш}$ и $\mathbf{f}^{ост}$ массы шарика $m_{ш}$ и остальной массы $m_{ост}$. Непрерывность поля $\mathbf{f}^{ост}$ в точке q (вне массы $m_{ост}$) очевидна; что же касается поля $\mathbf{f}^{ш}$, то можно доказать, что в точке q оно равно нулю. Однако при этом нельзя, полагая, шарик, однородным, ссылаться на равенство нулю поля однородного шара в его центре, так как не всегда можно массу выделенного нами шарика считать симметричной относительно точки q. Имеется в виду, например, случай, когда точка q находится на границе однородной массы, или более общий случай, когда в окрестности точки q плотность δ зависит от координат θ и φ сферической системы с центром в точке q. Но можно убедиться, что в любом случае $\mathbf{f}^{ш}(q)=0$. Действительно, $\mathbf{f}^{ш}(q)=\int \mathbf{df}^{ш}(q)$, где $\mathbf{df}^{ш}(q)$ – поле, создаваемое частью массы $m_{ш}$, находящейся в элементарном координатном конусе с телесным углом $d\Omega$ при его вершине q. Отрезок этого конуса между координатными сферическими поверхностями с радиусами $R\pm dR/2$ содержит массу $\delta\cdot R^2\cdot d\Omega\cdot dR$, создающую в точке q поле с абсолютной величиной $|\delta|\cdot d\Omega\cdot dR$. Поэтому

$$df^{ш}(q)\le|\delta|_{\max}\cdot d\Omega\cdot\int_0^{R_ш} dR,\ \text{т. е.}\ \ df^{ш}(q)\le|\delta|_{\max}\cdot R_ш\cdot d\Omega,$$

где $R_ш$ – радиус шарика, $|\delta|_{\max}$ – максимальное по координате R значение $|\delta|$ в конусе. Знак равенства соответствует случаю, когда δ не зависит от R. При $R_ш\to 0$ получаем $df^{ш}(q)\to 0$ и, следовательно, $f^{ш}(q)\to 0$.

Ограниченность потенциала U в объёмной массе подтверждается очевидным неравенством $|U^{ш}(q)|\le 2\pi\cdot R_ш^{\,2}\cdot|\delta|_{\max}$, где $U^{ш}$ – потенциал поля $\mathbf{f}^{ш}$, а $|\delta|_{\max}$ – максимальное значение $|\delta|$ в шарике, создающем это поле. Знак равенства соответствует случаю однородного шарика, в центре которого $U^{ш}(q)=2\pi\cdot R_ш^{\,2}\cdot\delta$, как следует из (2.79') (см. [Альпин, 1971], с. 100, решение 7а).

Возвращаясь к основному изложению, отметим, что непрерывность величин $U(a)$ и $\mathbf{f}(a)$ при прохождении точки a через объёмную массу объясняется малостью третьего порядка (dV) числителя в $(2.15)_2$ и $(2\ 44'')_2$. При перемещении точки a в объёмной массе эта точка на бесконечно малом пути пересекает бесконечно малую массу, чему соответствуют бесконечно малые приращения величин f_l и U. Между тем при переходе через точечную массу, т. е. через массу, занимающую бесконечно малый объём dV, но имеющую бесконечно большую плотность δ порядка $1/dV$, точка a на бесконечно малом пути пересекает конечную, а не бесконечно малую массу.

Таким образом, отмеченное различие в поведении полей точечной и объёмной масс определяется конечной плотностью объёмной массы и бесконечно большой объёмной плотностью δ точечной массы ($\delta=\infty^3$).

Промежуточное положение между объёмными и точечными массами занимают линейная и поверхностная массы, объёмная плотность которых равна бесконечности, но меньшего порядка по сравнению с объёмной плотностью точечной массы (см. § 1). В соответствии с этим можно предположить, что поля таких масс в отношении нарушений непрерывности также занимают промежуточное положение между полями объёмной и точечной масс. Оказывается, что у линейной массы ($\delta=\infty^2$) потенциал U и нормальная компонента вектора $\mathbf{f}$ обращаются в бесконечность, а на поверхностной массе ($\delta=\infty^1$) вектор $\mathbf{f}$ и потенциал U имеют ограниченные значения, но нормальная компонента вектора $\mathbf{f}$ терпит (конечный) разрыв.

Тангенциальная компонента вектора **f** у поверхностной или линейной массы непрерывна.

Условившись, что реальными являются только объёмные массы, мы должны считать поле **f** и потенциал U всюду непрерывными, а нарушение их непрерывности формальным осложнением, возникающим вследствие допускаемого нами существования необъёмных масс с плотностью $\delta=\infty$.

Более подробно о поведении поля **f** и его потенциала U у поверхностных масс будет сказано ниже.

II. Особые поверхности в кулоновом поле

Пусть S – поверхность, на которой имеется масса (заряд) с плотностью σ (рис. 2.14, *а*, *в*). Проведём через точку p этой поверхности, по нормали n к ней линию l и будем наблюдать потенциал $U(a)$ поля **f** в точке a, перемещающейся по этой линии.

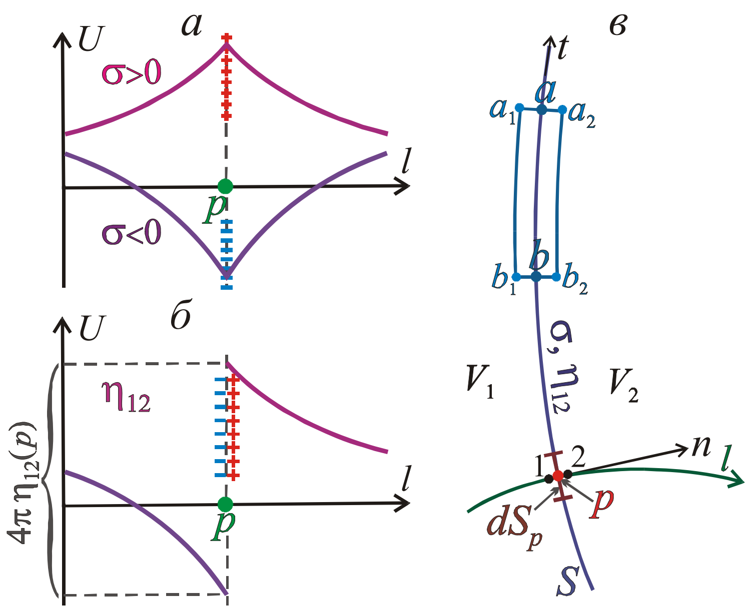

Рис. 2.14.

Потенциал у поверхности, несущей поверхностные массы.

Графики потенциала для простого и двойного слоёв (*а*), (*б*); поверхность S, на которой заданы σ и η_{12}, её элемент dS_p и четырёхугольный контур, служащий для вывода формулы $(2.86)_2$ (*в*)

Представим этот потенциал в виде суммы $U^p(a)+U^*(a)$, где U^p – потенциал поля $\mathbf{f}^p$, создаваемого массой $dm(p)=\sigma\cdot dS_p$ элемента dS_p поверхности S, содержащего точку p, а U^* – потенциал поля $\mathbf{f}^*$, создаваемого массами остальных элементов поверхности S (и другими массами, находящимися в пространстве). Очевидно, что потенциал U^* поля $\mathbf{f}^*$, которое мы имели бы при отсутствии массы $dm(p)$, непрерывен в точке p. Что же касается потенциала U^p, то его изменение по нормали n у точки p определяет компонента $f^p{}_n=-\partial U^p/\partial n$. Но эта компонента у точки p согласно (2.22), (2.22') имеет такие же значения, как в поле неограниченной однородной плоской массы, потенциал которого непрерывен в точке p. Таким образом, на поверхностной массе потенциал не терпит разрыва:

$$U^{(2)}(p)=U^{(1)}(p). \tag{2.81}$$

В противном случае компонента $f_n=-\partial U/\partial n$ обратилась бы в бесконечность, чему противоречит (2.22'). Это было принято во внимание при выводе формулы (2.48).

Перейдём к случаю, когда на поверхности S расположен двойной слой (рис. 2.14, *б*, *в*). Согласно выражениям (2.67) – (2.68), полученным для потенциала поля неограниченного (замкнутого, почти замкнутого или простирающегося до бесконечности) однородного двойного слоя, между любыми двумя точками a, находящимся в областях V_1 и V_2, разделяемых этим двойным слоем, имеем одну и ту же разность потенциалов $U^{(2)}(a)-U^{(1)}(a)=4\pi\cdot\eta_{12}$. Когда эти точки приближаются к какой-либо точке p двойного слоя, эта разность оказывается разрывом потенциала $U^{(2)}(p)-U^{(1)}(p)=4\pi\cdot\eta_{12}$ на двойном слое. Согласно (2.69) такой разрыв потенциала в поле плоского однородного двойного слоя имеется при любых и, в частности, элементарных его размерах. Сопоставляя $(1.132)_4$ с (2.66'), мы видим, что такой же разрыв потенциал терпит на любом однородном двойном слое. Нетрудно убедиться, что и в самом общем случае имеем на двойном слое разрыв

$$U^{(2)}(p)-U^{(1)}(p)=4\pi\cdot\eta_{12}(p), \tag{2.82}$$

где $\eta_{12}(p)$ – плотность дипольных моментов двойного слоя в точке p. Для этого выделим на поверхности S, несущей двойной слой, площадку dS_p, содержащую точку p, и представим потенциал в виде суммы $U^p(a)+U^*(a)$, в которой $U^p(a)$ – потенциал поля, создаваемого элементом двойного слоя, находящимся на площадке dS_p, а $U^*(a)$ – потенциал поля, создаваемого остальными элементами двойного слоя и другими, источниками поля, находящимися в пространстве. Потенциал $U^*(a)$, который мы имели бы, если бы на площадке dS_p плотность дипольных моментов двойного слоя η_{12} была равна нулю, очевидно, непрерывен в точке p, а потенциал $U^p(a)$ принимает в этой точке значения, определяемые формулами (2.69):

$$U^{p(1)}(p)=-2\pi\cdot\eta_{12}(p),\quad U^p(p)=0,\quad U^{p(2)}(p)=2\pi\cdot\eta_{12}(p), \tag{2.82'}$$

Поэтому

$$U^{(1)}(p)=U^*(p)-2\pi\cdot\eta_{12}(p),\;\; U(p)=U^*(p),\;\; U^{(2)}(p)=U^*(p)+2\pi\cdot\eta_{12}(p), \tag{2.82''}$$

где $U(p)$ – потенциал на самой поверхности S, несущей двойной слой (на средней поверхности между его обкладками), а не на её сторонах S_1 и S_2, принадлежащих к разделяемым ею областям V_1 и V_2. Следовательно, для любого двойного слоя получаем формулу (2.82), по которой потенциал U на нём терпит разрыв, равный $4\pi\cdot\eta_{12}$. Формула (2.82) применима к любой поверхности; отсутствию на поверхности S двойного слоя соответствует нулевое значение величины η_{12}, т. е. случай, когда формула (2.82) принимает частный вид (2.81). На любой поверхности S, на которой нет двойного слоя, потенциал U согласно (2.82) непрерывен.

Из (2.82'') следует, что

$$U(p)=[U^{(1)}(p)+U^{(2)}(p)]/2=U^{\text{ср}}(p)=U^*(p), \tag{2.83}$$

где $U^{\text{ср}}(p)$ – среднее из значений потенциала на сторонах S_1 и S_2 двойного слоя.

Разрыв потенциала $4\pi\cdot\eta_{12}$ на двойном слое, ненулевое напряжение на исчезающе малом пути L_{12} между обкладками двойного слоя легко понять, принимая во внимание поле $\mathbf{f}$ между этими обкладками. Согласно $(2.23'')_2$

нормальная компонента f_n поля однородного плоского двойного слоя в зазоре между его обкладками имеет значение $f_n^{\,i}=-4\pi\cdot\sigma$, причём в соответствии с (2.65) $|\sigma|\to\infty$. Это, очевидно, также верно для поля элемента двойного слоя в его средней точке p. Поле остальных элементов двойного слоя и других источников поля, очевидно, имеет в этой точке ограниченное значение, следовательно, в общем случае

$$f_n^{\,i}=-4\pi\cdot\sigma; \qquad |f_n^{\,i}|\to\infty, \text{ как } 1/L_{12} \text{ при } L_{12}\to 0. \tag{2.84}$$

Поэтому между сторонами S_1 и S_2 двойного слоя получается отличное от нуля напряжение $\mathcal{E}_{12}$ поля **f**:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{12}=\int_1^2 f_n^{\,i}\,dn, \quad \boldsymbol{\mathcal{E}}_{12}=-4\pi\cdot\sigma\cdot\int_1^2 dn=-4\pi\cdot\sigma\cdot L_{12}=-\,4\pi\cdot\eta_{12}. \tag{2.84'}$$

Из (2.84') следует, что плотность дипольных моментов, двойного слоя η_{12} определяется напряжением поля **f** на пути от стороны S_2 к стороне S_1 двойного слоя. Это определение отличается от определения $(2.62)_1$ б***о***льшей общностью; оно пригодно и в более сложном случае, когда двойной слой фактически представляет собой тонкий слой объёмных масс, в котором плотность δ меняется по нормали n к его поверхности так, что

$$\int_1^2 \delta(q)\,dn=0, \quad \text{но} \quad \int_1^2 \delta(q)\cdot\left(\mathbf{L}_{oq}\ \mathbf{dn}\right)=\eta_{12}=-\frac{1}{4\pi}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}_{12}\neq 0. \tag{2.84''}$$

Здесь q – точка, пробегающая от первой границы слоя до второй по нормали n к ним, а o – произвольно выбираемая (близкая) точка. Таким образом, разрыв потенциала на двойном слое объясняется бесконечно большим значением нормальной компоненты напряжённости поля в зазоре между обкладками двойного слоя. Фактически этот разрыв сводится к тому, что на пути почти нулевой длины L_{12} от S_1 до S_2 происходит чрезвычайно интенсивное ("быстрое") изменение потенциала, обусловленное очень большой напряжённостью поля. Но, допуская, что $L_{12}\to 0$, получаем вместо крутого спада потенциала разрыв потенциала, а вместо очень большого значения величины f_n – её бесконечно большое значение. Полагая $L_{12}\to 0$, мы исключаем из рассмотрения зазор между обкладками двойного слоя, и поле **f** в этом исчезающе малом зазоре нас интересует только в связи с его влиянием на напряжение $\mathcal{E}_{12}$ между сторонами двойного слоя.

III. Поведение компонент поля f у особой поверхности *S*

На этой поверхности в общем случае могут находиться и простой слой с плотностью σ, и двойной слой с плотностью дипольных моментов η_{12} (в частных случаях любая из этих величин может быть равна нулю). Как было отмечено в § 4 первой главы, поведение поля **f** у поверхности S (которая может быть особой для этого поля) характеризуют поверхностный ротор и поверхностная дивергенция вектора **f**.

Согласно (1.53) поверхностный ротор какого-либо вектора представляет собой отношение векторного потока этого вектора через замкнутую поверхность s, обтягивающую малый участок ΔS поверхности S, к площади ΔS этого участка. Но векторный поток вектора $\mathbf{f}$ через любую замкнутую поверхность согласно (2.28") равен нулю, следовательно, поверхностный ротор

$$\mathrm{Rot}\,\mathbf{f}=0. \tag{2.85}$$

Принимая во внимание (1.59), мы должны в общем случае представить поверхностный ротор вектора $\mathbf{f}$ формулой

$$\mathrm{Rot}\,\mathbf{f}=[\mathbf{n}\,(\mathbf{f}^{(2)}-\mathbf{f}^{(1)})]-[\mathbf{n}\ \mathrm{grad}^s\,\mathcal{E}_{12}],$$

в которой $\mathcal{E}_{12}$ – напряжение поля $\mathbf{f}$ между сторонами S_1 и S_2 поверхности S, определяемое формулой (2.84'). Поэтому уравнение (2.85) принимает вид

$$[\mathbf{n}\,(\mathbf{f}^{(2)}-\mathbf{f}^{(1)})]=[\mathbf{n}\ \mathrm{grad}^s\,\mathcal{E}_{12}] \quad \text{или} \quad f_t^{(2)}-f_t^{(1)}=\partial\mathcal{E}_{12}/\partial t, \tag{2.86}$$

где t – любое тангенциальное направление на поверхности S.

Формулу $(2.86)_2$ можно получить из уравнения $(2.28)_1$. Применяя это уравнение к показанному на рис. 2.14, *в* четырёхугольному замкнутому контуру a_1, a_2, b_2, b_1, a_1, получаем $\mathcal{E}_{a1a2}+\mathcal{E}_{a2b2}+\mathcal{E}_{b2b1}+\mathcal{E}_{b1a1}=0$. Прижимая стороны a_1b_1 и a_2b_2 к отрезку ab линии t на поверхности S и полагая расстояние ab равным dt, имеем

$$\mathcal{E}_{a1a2}=\mathcal{E}_{12}(a), \quad \mathcal{E}_{b2b1}=-\mathcal{E}_{12}(b), \quad \mathcal{E}_{a2b2}=f_t^{(2)}dt, \quad \mathcal{E}_{b1a1}=-f_t^{(1)}dt$$

и, следовательно,

$$\mathcal{E}_{12}(a)-\mathcal{E}_{12}(b)+(f_t^{(2)}-f_t^{(1)})\,dt=0$$

или

$$-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\mathcal{E}}_{12}\,dt+\left(f_t^{(2)}-f_t^{(1)}\right)dt=0,$$

что совпадает с $(2.86)_2$.

Пользуясь соотношением $(2.84')_2$, можно представить равенства (2.86) в следующем виде:

$$[\mathbf{n}\,(\mathbf{f}^{(2)}-\mathbf{f}^{(1)})]=-4\pi\cdot[\mathbf{n}\ \mathrm{grad}^s\,\eta_{12}], \tag*{$(2.87)_1$}$$

$$f_t^{(2)}-f_t^{(1)}=-4\pi\cdot\frac{\partial\eta_{12}}{\partial t}=-4\pi\cdot\mathrm{grad}_t^s\,\eta_{12}\,. \tag*{$(2.87)_2$}$$

Подставляя в $(2.87)_2$ соотношение $f_t=-\partial U/\partial t$, получаем

$$\frac{\partial U^{(2)}}{\partial t}-\frac{\partial U^{(1)}}{\partial t}=4\pi\cdot\frac{\partial\eta_{12}}{\partial t}. \tag{2.87'}$$

Очевидно, что из (2.82) дифференцированием по тангенциальному направлению t можно получить равенство (2.87'), а из него – $(2.87)_2$ по формуле $\partial U/\partial t=-f_t$. Там, где на поверхности S величина η_{12} не меняется по направлению t, имеем

$$\frac{\partial\eta_{12}}{\partial t}=0, \quad \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{E}}_{12}}{\partial t}=0, \quad f_t^{(2)}=f_t^{(1)}, \quad \frac{\partial U^{(2)}}{\partial t}=\frac{\partial U^{(1)}}{\partial t}. \tag{2.88}$$

Эти равенства справедливы для любого тангенциального направления t на поверхности S, если на ней двойной слой однороден и, в частности, если двойного слоя на ней нет ($\eta_{12}=0$). Таким образом, на поверхности S, на которой нет неоднородного двойного слоя, компонента f_t и производная от потенциала U по любому тангенциальному направлению непрерывны. Существование простого слоя на поверхности S не вызывает разрыва тангенциальной компоненты поля на этой поверхности, так как согласно (2.81) на таком слое нет разрыва тангенциальной производной потенциала.

Посмотрим теперь, как ведёт себя у поверхности S нормальная компонента вектора **f**. Согласно (1.47) поверхностная дивергенция какого-либо вектора определяется отношением скалярного потока этого вектора через замкнутую поверхность s, обтягивающую участок ΔS поверхности S, к площади ΔS этого участка. Поток вектора **f** через эту поверхность по теореме Гаусса - Остроградского (1.30) равен $4\pi\cdot\Delta m$, где Δm – масса, расположенная на участке ΔS. Двойной слой, находящийся на этом участке, не влияет на величину потока, так как сумма масс участка двойного слоя равна нулю. Следовательно, в соответствии с (1.48) поверхностная дивергенция $\mathrm{Div}\,\mathbf{f} = 4\pi\cdot\lim\limits_{\Delta S\to 0}\dfrac{\Delta m}{\Delta S}$, где Δm=$\sigma\cdot\Delta S$, а σ – плотность поверхностной массы (в виде простого слоя) на поверхности S. Таким образом, с учётом (1.49)

$$\mathrm{Div}\,\mathbf{f}=4\pi\cdot\sigma, \qquad f_n^{(2)}-f_n^{(1)}=4\pi\cdot\sigma, \tag{2.89}$$

т. е. нормальная компонента вектора **f** на поверхности S терпит разрыв, равный $4\pi\cdot\sigma$. Подставляя в (2.89) соотношение $f_n=-\partial U/\partial n$, получаем

$$\partial U^{(2)}/\partial n-\partial U^{(1)}/\partial n=-4\pi\cdot\sigma. \tag{2.89'}$$

При σ=0 имеем из $(2.89)_2$ и (2.89'):

$$f_n^{(2)}=f_n^{(1)}, \qquad \partial U^{(2)}/\partial n=\partial U^{(1)}/\partial n. \tag{2.90}$$

Следовательно, на любой поверхности, на которой нет поверхностной массы (простого слоя), нормальная компонента вектора **f** и нормальная производная потенциала U непрерывны. Они также непрерывны на двойном слое (точнее – имеют одинаковые значения в точках 1, 2 на "внешних сторонах" его обкладкок S_1 и S_2 (см. рис. 2.11, рис. 2.12)). На его обкладках S_1 и S_2 нормальная компонента f_n поля **f** терпит разрывы $f_n^{\,i}-f_n^{(1)}=4\pi\cdot\sigma_1$ и $f_n^{(2)}-f_n^{\,i}=4\pi\cdot\sigma_2$, одинаковые по абсолютной величине, но разного знака. Здесь $f_n^{\,i}$ – компонента f_n в точке p, между обкладками S_1 и S_2. Поэтому если, считая расстояние L_{12} между обкладками исчезающе малым, отвлечься от существования зазора между обкладками, то будем иметь только суммарный результат: $f_n^{(2)}-f_n^{(1)}=0$.

В том, что на поверхностной массе компонента f_n терпит конечный разрыв, определяемый формулой (2.89), полезно убедиться непосредственно исходя из выражения (2.15) для поля поверхностной массы. Такой расчёт компоненты f_n поля **f**, создаваемого однородной плоской массой, приведен в § 2. Из формул (2.22) следует справедливость формулы (2.89) для поля однородной, плоской массы любых размеров и, в частности, для поля элементарной поверхностной массы у её средней точки. Исходя из этого, можно доказать справедливость этой формулы для общего случая поверхностной массы, которая может быть неоднородной и располагаться на кривой поверхности S. Для этого выделим мысленно на поверхности S элемент dS_p, содержащий точку p, вблизи которой будем изучать поведение компоненты f_n, и положим $\mathbf{f}=\mathbf{f}^*+\mathbf{f}^p$, где $\mathbf{f}^*$ и $\mathbf{f}^p$ – слагаемые поля $\mathbf{f}$, о которых шла речь в разделе II. Поле $\mathbf{f}^*$, которое существовало бы, если бы вместо массы $\sigma\cdot dS_p$ в поверхностной массе было окно (т. е. элемент поверхности, лишённый массы), очевидно, не терпит разрыва в точке p этого окна, а для поля $\mathbf{f}^p$ имеем согласно (2.22)

$$f_n^{p(2)}(p)=2\pi\cdot\sigma_p,\quad f_n^{p}(p)=0,\quad f_n^{p(1)}(p)=-2\pi\cdot\sigma_p. \tag{2.91}$$

Поэтому

$$f_n^{(2)}(p)=f_n^*(p)+2\pi\cdot\sigma_p,\quad f_n(p)=f_n^*(p),\quad f_n^{(1)}(p)=f_n^*(p)-2\pi\cdot\sigma_p, \qquad (2.91')$$

где $f_n(p)$ – значение f_n в точке p, принадлежащей самой поверхности S (средней поверхности тонкого слоя).

Из формул (2.91') следует (2.89). Из них также следует, что

$$f_n^*(p)=[f_n^{(1)}(p)+f_n^{(2)}(p)]/2=f_n^{\text{ср}}(p),\qquad f_n(p)=f_n^{\text{ср}}(p), \qquad (2.91'')$$

где $f_n^{\text{ср}}(p)$ – среднее из значений нормальной компоненты поля $\mathbf{f}$ на сторонах S_1 и S_2 поверхностной массы.

IV. Особые линии и точки

Уделим теперь внимание поведению поля $\mathbf{f}$ и его потенциала U у линейной или точечной массы. Представим себе линейную массу, в общем случае неоднородную и расположенную на кривой линии l. Выделим из неё элемент $\lambda\cdot dl_p$ с центром в точке p и положим $\mathbf{f}=\mathbf{f}^*+\mathbf{f}^p$, где $\mathbf{f}^p$ – поле, создаваемое массой $\lambda\cdot dl_p$ элемента dl_p. Поле $\mathbf{f}^*$, очевидно, не терпит разрыва в точке p, а поле $\mathbf{f}^p$ согласно $(2.26)_1$ имеет у этой точки компоненту $f_n^p(p)=f_r^p(p)=2\lambda/r$ (λ – линейная плотность массы в точке p, а r – расстояние от этой точки в плоскости, нормальной к линии l). Таким образом, у линейной массы

$$f_n\to\frac{2\lambda}{r},\quad \frac{\partial U}{\partial n}\to-\frac{2\lambda}{r},\quad U\to 2\lambda\cdot\ln\frac{C}{r}\ \text{ при } r\to 0. \tag{2.92}$$

Что же касается компоненты f_t и производной $\partial U/\partial t$ по направлению, тангенциальному к линии l, то при $|d\lambda/dl|\neq\infty$ они непрерывны на этой линии.

У точечной массы m_q, находящейся в точке q, согласно $(2.14)_1$ и $(2.44')_1$ напряжённость и потенциал поля, создаваемого этой массой, очень велики по сравнению с напряжённостью и потенциалом поля, порождаемого остальными массами, находящимися в пространстве, поэтому в поле, создаваемом любой совокупностью масс, у каждой точки q, в которой находится точечная масса m_q, имеем

$$\mathbf{f}\to\mathbf{1}_R\cdot\frac{m_q}{R^2},\quad U\to\frac{m_q}{R}\ \text{ при } R\to 0, \tag{2.93}$$

где R – расстояние от точки q (или координата в системе R, θ, φ с началом O в точке q).

Формулам (2.92) и (2.93) согласно (2.73) и (2.56) соответствуют для дипольной линии и диполя формулы:

$$U \to 2\eta^{\lambda} \cdot \frac{\cos\varphi}{r} \text{ при } r \to 0, \tag{2.92'}$$

$$U \to \frac{(\mathbf{p}\,\mathbf{1}_R)}{R^2} \text{ при } R \to 0. \tag{2.93'}$$

В § 3 мы получили систему (2.34) дифференциальных уравнений, которым должно удовлетворять поле **f**. Она содержит три функции: $\operatorname{div}\mathbf{f}$, $\operatorname{rot}\mathbf{f}$ и δ; все они теряют смысл там, где имеются необъёмные массы. У точечных и линейных масс поведение поля определяется его особенностями, которые выражают формулы (2.92) – (2.93'). У поверхностей, на которых находятся простые и двойные слои, вместо уравнений системы (2.34) применимы равенства (2.85) и (2.89), которые следует рассматривать как поверхностные формы (вырождения) дифференциальных уравнений поля. Аналогично можно равенство (2.89') считать поверхностной формой уравнения (2.46).

§ 8. РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ СТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ВАКУУМЕ

В первое уравнение системы (2.34), определяющей поле **f**, плотность δ масс, создающих это поле, не входит; это однородное уравнение одинаково для всех возможных полей **f** (порождаемых различными совокупностями масс). Функция $\delta(a)$ входит в состав второго уравнения системы (2.34) и влияет на его решение. Это уравнение содержит три неизвестные компоненты поля, и поэтому оно в общем случае недостаточно для расчёта поля (расчёты поля, о которых шла речь в § 6, облегчаются благодаря симметрии масс). Но согласно решению (2.35) уравнения $(2.34)_1$ поле **f** является потенциальным, и вместо системы (2.34) мы получили уравнение (2.46) для потенциала U поля **f**. Решив это уравнение, мы найдем функцию U и сможем определить компоненты поля **f** по любым направлениям.

I. Условия единственности

В общем случае поле **f** в области V создают массы, находящиеся как внутри, так и вне этой области. Поля, получающиеся в области V при всевозможных совокупностях масс вне этой области, соответствуют уравнению (2.46) с одной и той же функцией $\delta(a)$ в правой части; их потенциалы являются его частными решениями. Таким образом, в соответствии со сказанным в § 7 первой главы, уравнение (2.46) так же, как система (2.34), определяет поле в области V с точностью до поля, создаваемого любыми массами, находящимися вне области V, т. е. до произвольного частного решения уравнения Лапласа (2.46'''). Но в разделе I, § 8 главы первой была изложена теорема единственности, на основании которой можно среди множества различных функций, являющихся частными решениями уравнения (2.46), узнать ту, которая представляет собой потенциал U определяемого поля **f**. Отличающим её признаком является то, что она (и только она) удовлетворяет совокупности дополняющих условий, которые, согласно теореме единственности, соответствующей уравнению (2.46), обеспечивают однозначность решения этого уравнения.

От изложенного в разделе I, § 8 главы первой применительно к уравнению $(1.96)_1$, перейти к уравнению (2.46) потенциала U изучаемого нами здесь поля **f** можно подстановками

$$\mathbf{M}=\mathbf{f}, \quad w^{v}(a)=4\pi\cdot\delta(a), \quad \Lambda=1, \quad Q=-4\pi\cdot m_V, \tag{2.94}$$

из которых четвёртая подстановка относится к краевому условию III типа (1.106') и соответствует формуле $(2.43)_3$.

В рассматриваемом поле **f** особыми поверхностями являются поверхности S, на которых имеются простые или двойные слои. В соответствии с (2.82) и (2.89') в условиях (1.110') надо положить

$$\zeta_{12}(p)=4\pi\cdot\eta_{12}(p), \quad \varphi_{12}(p)=-4\pi\cdot\sigma(p), \quad \Lambda_1=\Lambda_2=1. \tag{2.94'}$$

Особыми точками и линиями в рассматриваемом поле **f**, согласно изложенному в § 7, являются точки, в которых имеются точечные массы или диполи, и линии, несущие линейные массы или линейные диполи. У этих точек и линий применяются условия (2.92) – (2.93') для U.

Таким образом, для определения потенциала U поля **f** в области V надо знать функцию δ в этой области и значения, которые принимает на границе $S[V]$ области V потенциал U или его нормальная производная или же (если $S[V]$ – эквипотенциальная поверхность) значение потока вектора grad U через поверхность $S[V]$. Кроме того, надо (внутри области V) знать значения: функций σ и η во всех точках каждой особой поверхности, функции λ и η^{λ} во всех точках каждой особой линии и величин m_q и **p** во всех особых точках.

Вторым или третьим из указанных краевых условий (на $S[V]$) потенциал U определяется только с точностью до постоянного слагаемого C, которое, однако, обращается в нуль при задании значения U хотя бы в одной точке области V или её границы $S[V]$.

К замечаниям, приведенным в разделе II, § 8 главы первой, надо для рассматриваемого здесь поля **f** добавить следующие.

1. Если областью V является всё пространство, а массы имеются только на конечных расстояниях, то указанные в замечании 6, § 8 главы первой условия на бесконечности в данном случае сводятся к условию (2.47) «регулярности» функции U на бесконечности. Но если алгебраическая сумма этих масс равна нулю, а дипольный момент $\mathbf{M}_\Theta$ их совокупности отличен от нуля, то в (2.47) надо вместо m_Θ / L_{oa} подставить $\left(\mathbf{L}_{oa}\,\mathbf{M}_\Theta\right)/L_{oa}^3$. Если массы, создающие поле, простираются до бесконечности, то в зависимости от их распределения в далёких областях пространства получаем различные условия на бесконечности.

2. Если в области V масс нет, то поле в ней определяется полностью краевыми условиями на поверхности $S[V]$.

3. Если на границе $S[V]$ области V потенциал U или его нормальная производная $\partial U/\partial n$ обращается в нуль, а внутри этой области масс нет, то в любой точке области V соответственно U=0 или ∇U=grad U=0.

II. Формулы Грина

Пусть векторное поле

$$\mathbf{X}(q)=\varphi(q)\cdot\nabla\psi(q)-\psi(q)\cdot\nabla\varphi(q)=\varphi(q)\cdot\mathrm{grad}\,\psi(q)-\psi(q)\cdot\mathrm{grad}\,\varphi(q), \qquad (2.95)$$

где $\varphi(q)$ и $\psi(q)$ – функции точки q (скалярные поля), ограниченные и непрерывные вместе со своими первыми производными в области V, Применяя к вектору $\mathbf{X}$ в области V теорему Гаусса - Остроградского (1.30), получаем формулы Грина

$$\left.\begin{aligned} \oint\limits_{S[V]}\varphi\cdot(\nabla\psi\,\mathbf{dS})-\oint\limits_{S[V]}\psi\cdot(\nabla\varphi\,\mathbf{dS})=\int\limits_{V}\left(\varphi\cdot\nabla^2\psi-\psi\cdot\nabla^2\varphi\right)dV,\\ \oint\limits_{S[V]}\frac{\partial\psi}{\partial n}dS=\int\limits_{V}\nabla^2\psi\,dV, \end{aligned}\right\} \qquad (2.95')$$

из которых вторая получается при $\nabla\varphi=0$. В (2.95') принято во внимание, что скалярное произведение $(\nabla\psi\,\mathbf{dS})=\partial\psi/\partial n\cdot dS$.

Положим в (2.95) $\varphi(q)=1/L_{qa}$, где a – точка, находящаяся в области V. При этом мы нарушим принятое выше (и необходимое для применения теоремы Гаусса - Остроградского) условие непрерывности $\mathbf{X}$, так как при $q\to a$ $1/L_{qa}\to\infty$. Но мы выделим точку a из области V, окружив её сферической поверхностью «безопасности» $S[a]$ с центром в этой точке и с радиусом R (рис. 2.15), Для остающейся области V^*, расположенной между поверхностями $S[V]$ и $S[a]$, при $\varphi(q)=1/L_{qa}$ получаем из $(2.95')_1$

$$\oint\limits_{S[V^*]}\frac{1}{L_{qa}}(\nabla\psi\,\mathbf{dS})-\oint\limits_{S[V^*]}\psi\cdot\left(\overset{q}{\nabla}\left(\frac{1}{L_{qa}}\right)\mathbf{dS}\right)=\int\limits_{V^*}\frac{\nabla^2\psi}{L_{qa}}dV-\int\limits_{V^*}\psi\cdot\overset{q}{\nabla}{}^2\left(\frac{1}{L_{qa}}\right)dV, \qquad (2.95'')$$

где $S[V^*]$ – совокупность поверхностей $S[V]$ и $S[a]$, ограничивающих область V^*.

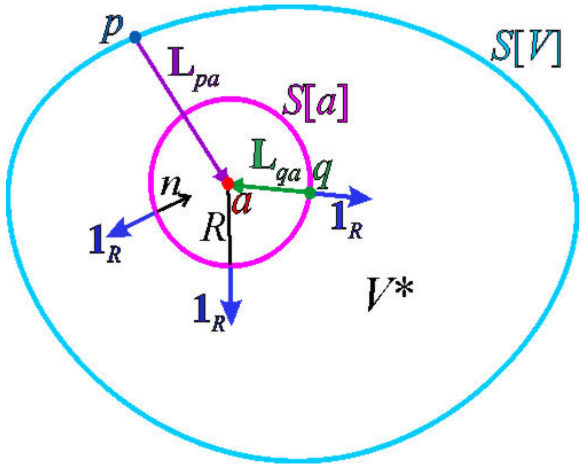

Рис. 2.15.
Сферическая поверхность $S[a]$, выделяющая окрестность точки a из области V

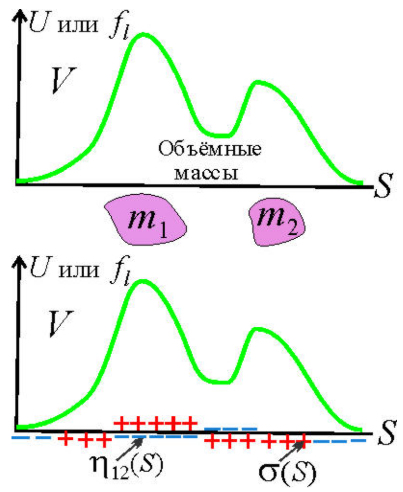

Рис. 2.16.
Иллюстрация к формуле (2.99''')

Интегрируя отдельно по этим поверхностям и принимая во внимание, что согласно (1.127') в области V^* $\nabla^2(1/L_{qa})=0$, получаем

$$\oint_{S[V]} \frac{1}{L_{qa}} \frac{\partial \psi}{\partial n} dS + \oint_{S[a]} \frac{1}{L_{qa}} \frac{\partial \psi}{\partial n} dS - \oint_{S[V]} \psi \left(\overset{q}{\nabla} \left(\frac{1}{L_{qa}} \right) \mathbf{dS} \right) - \oint_{S[a]} \psi \left(\overset{q}{\nabla} \left(\frac{1}{L_{qa}} \right) \mathbf{dS} \right) =$$

$$= \int_{V^*} \frac{\nabla^2 \psi}{L_{qa}} dV; \qquad (2.96)$$

здесь n – нормаль к поверхности $S[V^*]$, направленная наружу относительно области V^*.

Учитывая, что согласно $(1.127)_2$ $\overset{q}{\nabla}\left(1/L_{qa}\right) = \mathbf{L}_{qa} / L_{qa}^3$, а в точке q, находящейся на поверхности $S[a]$, $\mathbf{L}_{qa} = -\mathbf{1}_R \cdot R$, имеем

$$\oint_{S[a]} \psi \left(\overset{q}{\nabla} \left(\frac{1}{L_{qa}} \right) \mathbf{dS} \right) = \oint_{S[a]} \psi \frac{(\mathbf{L}_{qa}\ \mathbf{dS})}{L_{qa}^3} = \frac{1}{R^2} \oint_{S[a]} \psi\, dS = \frac{S_a}{R^2} \cdot \psi_a^{\text{ср}} = 4\pi \cdot \psi_a^{\text{ср}}, \qquad (2.97)$$

$$\oint_{S[a]} \frac{1}{L_{qa}} \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = \frac{1}{R} \oint_{S[a]} \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = -\frac{1}{R} \left(\frac{\partial \psi}{\partial R} \right)_a^{\text{ср}} \cdot S_a = -4\pi \cdot R \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial R} \right)_a^{\text{ср}}, \qquad (2.97')$$

где $S_a = 4\pi \cdot R^2$ – площадь сферической поверхности $S[a]$, а $\psi_a^{\text{ср}}$ и $\left(\frac{\partial \psi}{\partial R} \right)_a^{\text{ср}}$ – средние значения величин ψ и $\partial\psi/\partial R$ на этой поверхности.

При $R \to 0$, т. е. когда поверхность $S[a]$ стягивается к точке a, имеем

$$\psi_a^{\text{ср}} \to \psi(a), \quad R \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial R} \right)_a^{\text{ср}} \to 0, \quad V^* \to V. \qquad (2.97'')$$

Следовательно, полагая $R \to 0$, получаем из (2.96) *основную формулу Грина*:

$$\oint_{S[V]} \frac{1}{L_{qa}} (\nabla \psi\ \mathbf{dS}) - \oint_{S[V]} \psi \cdot \left(\overset{q}{\nabla} \left(\frac{1}{L_{qa}} \right) \mathbf{dS} \right) - \int_V \frac{\nabla^2 \psi}{L_{qa}} dV = 4\pi \cdot \psi(a). \qquad (2.98)$$

Полагая скалярное поле $\psi = U$, где U – функция, удовлетворяющая уравнению (2.46) в области V (согласно которому $\nabla^2 U = -4\pi \cdot \delta$) и обозначая точку q на поверхности $S[V]$ буквой p (см. рис. 2.15), получаем из (2.98)

$$U(a) = \int_V \frac{\delta(q)}{L_{qa}} dV + \frac{1}{4\pi} \cdot \oint_{S[V]} \frac{1}{L_{pa}} \frac{\partial U(p)}{\partial n} dS + \frac{1}{4\pi} \cdot \oint_{S[V]} U(p)\, d\omega, \qquad (2.99)$$

где

$$d\omega = \frac{(\mathbf{L}_{ap}\ \mathbf{dS})}{L_{ap}^3} = -\frac{(\mathbf{L}_{pa}\ \mathbf{dS})}{L_{pa}^3} = -\left(\lim_{q \to p} \overset{q}{\nabla} \left(\frac{1}{L_{qa}} \right) \mathbf{dS} \right) = -\lim_{q \to p} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{L_{qa}} \right) dS \qquad (2.99')$$

– угол видимости элемента dS поверхности $S[V]$ из точки a, положительный, когда к точке a обращена внутренняя сторона этого элемента.

Мы получили выражение (2.99) для решения $U(a)$ уравнения Пуассона (2.46) в области V или для гармонической функции, удовлетворяющей уравнению Лапласа (2.46'''), если убрать из (2.99) объёмный интеграл. В частности, формула (2.99) применима к потенциалу U поля **f** в области V при любых массах в пространстве, когда в этой области нет необъёмных масс, а на поверхности $S[V]$ нет точечных и линейных масс. Формула (2.99) позволяет определить этот потенциал, не зная масс, находящихся на поверхности $S[V]$ и вне неё. Данные об этих массах заменяют значения на поверхности $S[V]$ потенциала $U(p)$ и его нормальной производной $\partial U(p)/\partial n$.

В соответствии с (2.45) первое слагаемое в правой части (2.99) это потенциал поля **f** объёмных масс, находящихся в области V. Из (2.99) следует, что при неизвестных массах m, находящиеся вне области V сведения о них могут заменить известные значения $U(p)$ и $\partial U(p)/\partial n$ на поверхности $S[V]$. Если в области V нет источников поля **f** ($\delta(q)$=0), то есть, например, область V – вакуум (или воздух), то из (2.99) получаем:

$$U(a)=\frac{1}{4\pi}\oint_{S[V]}\frac{1}{L_{pa}}\frac{\partial U(p)}{\partial n}dS+\frac{1}{4\pi}\oint_{S[V]}U(p)d\omega. \qquad (2.99'')$$

То есть значения $U(a)$ в точках a области V, где нет источников поля, полностью определяют величины $U(p)$ и $\partial U(p)/\partial n$ на границе $S[V]$ области V.

Обозначая $\sigma(p)=(\partial U(p)/\partial n)/(4\pi)$, $\eta_{12}(p)=-U(p)/(4\pi)$, получаем:

$$U(a)=\oint_{S[V]}\frac{\sigma(p)dS}{L_{ap}}+\left(-\oint_{S[V]}\eta_{12}(p)d\omega\right). \qquad (2.99''')$$

Сравним (2.99''') с выражениями (2.45), (2.66) для потенциалов U поля **f** простого слоя (с поверхностной плотностью σ) и двойного слоя (с поверхностной плотностью дипольных моментов η_{12}): $U(a)=\int_S\frac{\sigma(q)dS}{L_{qa}}$, $U(a)=-\int_S\eta_{12}(q)d\omega(a)$. Видно, что первое и второе слагаемые в правой части (2.99''') - это потенциалы U полей **f**, создаваемых соответственно простым слоем и двойным слоем на границе $S[V]$ области V. Отсюда следует, что поле **f** любых источников, расположенных вне области V можно заменить в этой области полями простого и двойного слоёв на границе $S[V]$.

На рис. 2.16 сделана попытка показать то, что, например, наблюдаемое у поверхности Земли поле любых находящихся в Земле масс можно заменить полем простого и двойного слоёв на поверхности Земли. Это – одна из возможных иллюстраций того, что решения обратных задач для поля **f** (определение источников поля по измеренным вне этих источников характеристикам поля) не однозначны.

III. Функция Грина

Согласно изложенному в разделе I и в первой главе решение $U(a)$ уравнения Пуассона (2.46) полностью определяется в области V значениями $\delta(q)$ в этой области и значениями $U(p)$ на её границе $S[V]$. Поэтому уместно попытаться исключить из выражения (2.99) для $U(a)$ производную $\partial U(p)/\partial n$. С этой целью вернёмся к формуле $(2.95')_1$ и подставим в неё в качестве функции φ вместо $1/L_{qa}$ функцию Грина (функцию источника):

$$G(a, q)=(1/L_{qa})+h(a, q), \qquad (2.100)$$

где $h(a, q)$ – функция, удовлетворяющая условиям

$$\nabla^2 h(a, q)=0, \qquad h(a, p)=-(1/L_{qa}). \qquad (2.100')$$

Здесь так же, как и в (2.95) – (2.98), аргументом считаем точку q, а через

p обозначаем эту точку, когда она попадает на поверхность $S[V]$. Точка a является параметром функции Грина.

Из (2.100), (2.100') следует, что

$$\nabla^2 G(a, q) = 0 \quad \text{при} \quad L_{qa} > 0, \qquad G(a, p) = 0, \tag{2.101}$$

$$G(a, q) \to (1/L_{qa}) \quad \text{при} \quad L_{qa} \to 0. \tag{2.101'}$$

Условие (2.101') следует из того, что слагаемое $h(a, q)$ в (2.100) ограничено во всей области V, и поэтому им можно пренебречь сравнительно с $(1/L_{qa})$ при $L_{qa} \to 0$. Функция $G(a, q)$ полностью определяется поверхностью $S[V]$; каждой поверхности $S[V]$ соответствует своя функция $G(a, q)$ точек a и q.

Можно доказать, что функция $G(a, q)$ симметрична относительно точек a и q:

$$G(a, q) = G(q, a), \qquad h(a, q) = h(q, a) \tag{2.101''}$$

и что $G>0$ в области V, кроме её границы, на которой $G=0$.

Итак, полагаем в $(2.95')_1$ $\varphi = G(a, q)$ и получаем равенства (2.95''), (2.96) с заменой функции $(1/L_{qa})$ функцией $G(a, q)$, причём по-прежнему второй член, правой части (2.95'') согласно $(2.101)_1$ обращается в нуль, а в левой части (2.96) при $R \to 0$ четвёртый и второй члены стремятся соответственно к $-4\pi \cdot \psi(a)$ и к нулю в соответствии с (2.101'), (2.97) – (2.97''). Но согласно $(2.101)_2$ первый член левой части (2.96) также исчезает. Следовательно, вместо (2.99) получаем

$$U(a) = \int_V G(a, q) \cdot \delta(q)\, dV - \frac{1}{4\pi} \oint_{S[V]} \frac{\partial G(a, p)}{\partial n} \cdot U(p)\, dS, \tag{2.102}$$

где $\partial G(a, p)/\partial n < 0$, а нормаль n направлена наружу.

Полагая в (2.102) $\delta = 0$, получаем для любой функции U, гармонической в области V, выражение через её значения на границе области V:

$$U(a) = -\frac{1}{4\pi} \oint_{S[V]} \frac{\partial G(a, p)}{\partial n} \cdot U(p)\, dS. \tag{2.102'}$$

Для функции $U(a)$, гармонической в области V, можно получить вместо (2.102') выражение через значения нормальной производной от U на поверхности $S[V]$. Для этого вместо функции Грина применяют аналогичную ей функцию Неймана.

При $U(p)=0$ имеем из (2.99)

$$U(a) = \int_V G(a, q) \cdot \delta(q)\, dV. \tag{2.102''}$$

Из изложенного следует, что, располагая функцией Грина для некоторой поверхности $S[V]$, мы для области V имеем возможность найти решение уравнения Пуассона – Лапласа с краевым условием первого типа и решить задачу Дирихле (см. замечание 14 в § 8 главы первой). Но, чтобы для заданной поверхности $S[V]$ найти функцию Грина, необходимо подобрать такую функцию $h(a, q)$, которая удовлетворяет требованиям (2.100'), т. е. уравнению Лапласа в области V и краевому условию $h(a, p) = -1/L_{ap}$ на $S[V]$. Следовательно, задача построения функции Грина для какой-либо поверхности $S[V]$ сводится к задаче Дирихле с определённым видом краевого условия первого типа.

Выше шла речь о внутренней задаче – определении $U(a)$ в области V, расположенной внутри поверхности $S[V]$. Можно также построить функцию Грина $G'(a, q)$ для внешней области V', расположенной снаружи поверхности $S[V]$:

$$G'(a, q) = (1/L_{qa}) + h'(a, q).$$

Функции G' и h' определяются формулами (2.100') – (2.101') с добавлением требования регулярности функции h' на бесконечности. Полагая, что U – функция, регулярная на бесконечности и гармоническая в области V, можно получить для $U(a)$ в этой области выражение (2.102') с заменой функции G функцией G' и обращением знака перед правой частью или направления нормали n.

Для выяснения физического смысла функции Грина и её слагаемого $h(a, q)$ допустим, что в точке a внутри области V находится точечная масса m, а вне этой области, в частности на её границе $S[V]$, имеются «наружные» массы, распределённые так, что в любой точке p границы $S[V]$ потенциал $U^{\text{нр}}$ их поля $\mathbf{f}^{\text{нр}}$ равен с обратным знаком потенциалу U^a поля $\mathbf{f}^a$ массы m. Совокупность наружных масс будем обозначать $m_{\text{нр}}$. В точке q области V имеем потенциал $U(q) = U^a(q) + U^{\text{нр}}(q)$. Ясно, что функция $U^{\text{нр}}(q)/m$ удовлетворяет условиям (2.100'), а функция $U(q)/m$ – условиям (2.101), (2.101'). Следовательно, эти функции совпадают с $h(a, q)$ и $G(a, q)$:

$$G(a, q)\cdot m = U(q),\ \ U(q) = U^a(q) + U^{\text{нр}}(q),\ \ U^a(q) = m/L_{aq},\ \ U^{\text{нр}}(q) = m\cdot h(a, q). \tag{2.103}$$

Таким образом, функция Грина – это отнесённый к единице массы m потенциал $U(q)$ поля масс m и $m_{\text{нр}}$ при распределении массы $m_{\text{нр}}$, удовлетворяющем условию $U^{\text{нр}}(p) = -m/L_{ap}$ на поверхности $S[V]$.

А можно ли удовлетворить этому условию для произвольно заданной поверхности $S[V]$? Возможна ли хотя бы одна такая (так распределённая) масса $m_{\text{нр}}$? Иначе говоря, существует ли функция $G(a, q)$, удовлетворяющая условиям (2.100) – (2.101')? На этот вопрос утвердительный ответ нетрудно получить на основе электростатической интерпретации функции Грина (см. раздел V, § 7 главы третьей). Там будет показано, что массу $m_{\text{нр}}$ можно представить в виде простого слоя на поверхности $S[V]$. Потенциалу поля этого слоя соответствует слагаемое $h(a, q)$ функции Грина.

IV. Решение уравнения Пуассона

Здесь несколько дополним сказанное в разделах II и III о решении уравнения (2.46) и перейдём к случаю, когда в области V имеется особая точка (точечная масса).

1. Сопоставляя члены правой части (2.99) с полученными в предыдущих параграфах выражениями для потенциала U поля $\mathbf{f}$, через массы, создающие это поле, мы видим, что любое решение U уравнения Пуассона (2.46) для области V может быть представлено суммой потенциалов трёх полей $\mathbf{f}$, создаваемых объёмной массой с плотностью δ в области V, простым слоем с плотностью σ на поверхности $S[V]$ и двойным слоем с плотностью дипольных моментов η_{ie} на той же поверхности, причём

$$\sigma(p)=(\partial U(p)/\partial n)/(4\pi), \qquad \eta_{ie}(p)=-U(p)/(4\pi).$$

Очевидно, что прибавив (с плюсом или минусом) к правой части (2.99) какую-либо функцию, гармоническую в области V, получим опять решение уравнения Пуассона (2.46). Но два последних члена правой части (2.99), очевидно, удовлетворяют уравнению Лапласа в области V, поэтому, отбросив их, получим функцию, удовлетворяющую уравнению (2.46). Иначе говоря, функция

$$U(a)=\int_V \frac{\delta(q)}{L_{qa}}\,dV \tag{2.102'''}$$

также является решением уравнения Пуассона.

Выражение (2.102''') получается непосредственно из (2.99), так как в этом случае второй и третий интегралы в (2.99) обращаются в нуль. Чтобы в этом убедиться, достаточно заменить в них подынтегральные функции их средними на $S[V]$ значениями и взять в качестве $S[V]$ сферическую поверхность достаточно большого радиуса ([Альпин, 1966], с. 170).

Если δ=0 вне ограниченной со всех сторон области V, то можно в (2.102''') распространить интегрирование на всё пространство, так как в точках q, в которых δ=0, подынтегральная функция в (2.102''') равна нулю. В этом случае решение (2.102''') регулярно на бесконечности, а этого достаточно для его единственности. Следовательно, для случая, когда δ=0 вне ограниченной со всех сторон области V, выражение (2.102''') является единственным решением уравнения Пуассона, удовлетворяющим условию регулярности на бесконечности.

Совпадающее с (2.102''') выражение $(2.44'')_2$ для потенциала U было получено на основе перехода от поля точечной массы к полю элементарной объёмной массы. Приведенный здесь вывод весьма важного решения (2.102''') уравнения (2.46) отличается большей строгостью и большей общностью. Это позволит нам сослаться на выражение $(2.44'')_2$ при выводе уравнения (5.18') для функции, отличающейся по физическому смыслу от потенциала U поля **f**.

2. В области V, в которой имеется необъёмная масса, уравнение Пуассона (2.46) для потенциала U поля **f** теряет смысл. Но допустим, что в области V функция δ отлична от нуля только в очень малой окрестности V_ε точки q, где δ имеет очень большое значение δ_ε. При не слишком малых значениях L_{aq} можно в выражении для $U(a)$ заменить эту объёмную массу равной ей точечной массой $m=V_\varepsilon\cdot\delta_\varepsilon$. Заменяя среднее по области V_ε значение функции G её значением в точке q, получаем при $U(p)$=0 согласно (2.102'')

$$U(a)=m\cdot G(a,q). \tag{2.103'}$$

Поэтому можно сказать, что решение (2.102'') для случая точечной массы принимает вид (2.103'), а функция $G(a, q)$ является решением уравнения Пуассона при замене m единичной массой. Ниже эти выводы будут представлены в более развитом виде.

Меняя ролями точки a и q, получаем из $(2,103)_1$: $U(a)=m\cdot G(q, a)$, но согласно (2.101'') это совпадает с (2.103').

V. Применение дельта-функции

Если в области V объёмная плотность δ=0 за исключением одной из её точек q, в которой находится точечная масса m, то в этой области согласно изложенному в предыдущих параграфах потенциал, $U(a)$ определяется как функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа в области V без её элемента, содержащего точечную массу, условию $U(a)=m/L_{qa}$ у этой точки и условию на поверхности $S[V]$. Но можно в этом случае так же, как в случае объёмной массы в области V, получить уравнение потенциала для всей области V, замещающее уравнение Лапласа вместе с условием у точечной массы. Для получения такого уравнения применяют *д е л ь т а – ф у н к ц и ю Д и р а к а*, которую будем обозначать $\delta_{\text{Д}}$.

Пусть V_ε – малая окрестность точки q, ограниченная сферической поверхностью $S[V_\varepsilon]$ с радиусом R_ε и с центром в точке q, V – область, содержащая окрестность V_ε, а q' – точка, пробегающая область V. Положение точки q' будем определять относительно точки q вектором $\mathbf{L}_{qq'}$. Определить нужную нам трёхмерную дельта-функцию можно так:

$$\delta_{\text{Д}}(L_{qq'}) = \lim_{R_\varepsilon\to 0}\begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad L_{qq'} > R_\varepsilon, \\ 1/V_\varepsilon \ \text{при} \quad L_{qq'} > R_\varepsilon, \end{cases} \quad V_\varepsilon = \frac{4}{3}\pi\cdot R_\varepsilon^3. \qquad (2.104)$$

Согласно (2.104) $\delta_{\text{Д}}(L_{qq'})=\delta_{\text{Д}}(L_{q'q})$; при $L_{qq'}>0$ $\delta_{\text{Д}}(L_{qq'})=0$, а при $L_{qq'}\to 0$ $\delta_{\text{Д}}(L_{qq'})\to\infty$, как $1/V_\varepsilon$, но

$$\int_V \delta_{\text{Д}}(L_{qq'})\,dV' = 1, \ \text{ а } \int_V F(q')\cdot\delta_{\text{Д}}(L_{qq'})\,dV' = F(q). \qquad (2.104')$$

при условии, что функция $F(q')$ ограничена в области V. Если функция $F(q')\to\infty$ в некоторой точке области V, то для применимости $(2.104')_2$ достаточно, чтобы интеграл от функции $F(q')$ по окрестности этой точки имел ограниченное значение. Окрестность V_ε можно взять произвольной формы, причём в (2.104) надо вместо $R_\varepsilon\to 0$ писать $V_\varepsilon\to 0$, а вместо неравенств указать положения точки q': вне окрестности V_ε и внутри неё.

Ограничивая окрестность V_ε тремя парами координатных поверхностей, можно выразить дельта-функцию через разности координат точек q и q', определяющие компоненты вектора $\mathbf{L}_{qq'}$, по координатным направлениям.

В одномерном случае имеем аналогично (2.104), $(2.104')_1$

$$\delta_{\text{Д}}(x'-x) = \lim_{\alpha\to 0}\begin{cases} 0 \qquad \text{при } |x'-x| > \alpha, \\ 1/(2\cdot\alpha) \ \text{при } |x'-x| < \alpha. \end{cases}$$

$$\delta_{\text{Д}}(x'-x) = 0 \ \text{ при } \ x' \neq x, \qquad \delta_{\text{Д}}(x'-x)\to\infty \ \text{ при } \ x'\to x;$$

$$\int_a^b \delta_{\text{Д}}(x'-x)\,dx' = 1 \quad (a<x<b),$$

где x и x' – координаты точек q и q' оси X; $2\cdot\alpha$ – длина малого отрезка этой оси со средней точкой q.

Пусть m – масса, распределённая в области V с ограниченной объёмной плотностью $\delta(q)$, где q – любая точка области V. Тогда при любых массах вне области V потенциал U в каждой точке q этой области удовлетворяет уравнению (2.46): $\nabla^2 U(q) = -4\pi \cdot \delta(q)$. Вспомогательное обозначение q' заменяем (там, где это можно) обычным обозначением q, имея в виду, что q' – любая точка области V. Стянем массу m в окрестность V_ε одной из точек q области V. Взяв окрестность V_ε этой точки достаточно малой, будем полагать $m = \delta \cdot V_\varepsilon$ (т. е. заменим среднее по V_ε значение функции δ значением δ в точке q). При $V_\varepsilon \to 0$ получим в точке q $\delta \to \infty$ как m/V_ε при $V_\varepsilon \to 0$, а в остальных точках q области V будем иметь $\delta = 0$; интеграл же функции δ по области V будет оставаться равным m. Теперь заметим, что, согласно (2.104) и (2.104'), произведение $m \cdot \delta_Д(L_{qq'})$ ведёт себя так же, как δ в области V, из которой масса m стянута в точку q. В этой точке оно равно m/V_ε, в остальных точках – нулю; в результате его интегрирования по V получаем m. Следовательно, это произведение есть предельное выражение для функции δ в области V при стягивании массы m к какой-либо точке q этой области. Обозначая это предельное выражение через $\delta^Т$, получаем, согласно $(2.104')_1$ в соответствии с (2.3)

$$\int_V \delta^Т \, dV = m, \text{ где } \delta^Т = m \cdot \delta_Д(L_{qq'}) \qquad (2.104'')$$

– функция, определяющая распределение массы в области V. Она аналогична функции δ и условно её можно назвать объёмной плотностью массы в области V, в которой имеется только точечная масса.

Аналогично с помощью двумерной дельта-функции можно получить выражение для объёмной плотности δ^λ в случае линейной массы. Выражение для объёмной плотности δ^σ в случае поверхностной массы можно получить с помощью одномерной дельта-функции. Применяя одномерную или двумерную дельта-функцию и плотность δ^σ или δ^λ, можно получить, уравнение, аналогичное уравнению (2.105) для трёхмерной области V, в которой задана поверхностная или линейная масса соответственно.

Здесь шла речь о вырождениях объёмной массы в точечную, поверхностную или линейную. Могут также представлять интерес случаи точечных вырождений линейных и поверхностных масс и соответствующие этим случаям одномерный и двухмерный аналоги уравнения (2.105). В этих случаях получаются линейная и поверхностная плотности $\lambda^Т$ и $\sigma^Т$ точечной массы и применимы одномерная н двухмерная дельта-функции соответственно.

Подставляя в (2.46) $\delta^Т$ вместо δ, получаем предельный вид уравнения Пуассона, соответствующий случаю, когда масса m стягивается к какой-либо из точек q области V:

$$\nabla^2 U = -4\pi \cdot \delta^Т \quad \text{т. е.} \quad \nabla^2 U = -4\pi \cdot m \cdot \delta_Д(L_{qq'}). \qquad (2.105)$$

Это неоднородное уравнение (Пуассона) для всей области V заменяет однородное уравнение (Лапласа) для этой области без её точки q и условие $U(a) = m/L_{qa}$ у этой точки. Уравнение (2.105) должно быть дополнено условием на поверхности $S[V]$.

Учитывая изложенное в разделе I, § 8 первой главы, можно утверждать, что условиями

$$\nabla^2 U=0 \text{ при } L_{qa}>0, \qquad U=0 \text{ на } S[V], \qquad U\to m/L_{qa} \text{ при } L_{qa}\to 0 \quad (2.104''')$$
однозначно определяется в области V потенциал $U(a)$ для случая, когда в точке q области V находится точечная масса m, а на границе этой области U=0. Из сравнения (2.104''') с условиями (2.101), (2.101') для функции $G(a, q)$ следует, что функция Грина совпадает с функцией U/m, т. е. с потенциалом U в точке a поля единичной точечной массы, находящейся в точке q, при U=0 на $S[V]$. Следовательно, уравнению (2.105) для U должно соответствовать для функции G уравнение

$$\nabla^2 G=-4\pi\cdot\delta_Д(L_{qq'}). \qquad (2.105')$$

Таким образом, функцию Грина $G(a, q)$ для поверхности $S[V]$ можно определить как решение уравнения (2.105') для области V, обращающееся в нуль на $S[V]$.

Аналогично можно определить функцию Грина для уравнения $L\,U=-4\pi\cdot\delta$, где L – линейный n-мерный оператор; частными его видами являются операторы Лапласа ∇^2 и Даламбера $\square^2$ (см. раздел II, § 5 главы шестой).

Подставляя в $(2.104')_2$ $F(q')=G(a, q')$, имеем

$$G(a,q)=\int_V G(a,q')\cdot\delta_Д(L_{qq'})\,dV'.$$

Умножая это равенство на m и применяя обозначение $(2.104'')_2$, получаем

$$m\cdot G(a,q)=\int_V G(a,q')\cdot\delta^{Т}\,dV'.$$

В соответствии с (2.102'') имеем для случая точечной массы m в точке q области V, на границе которой U=0,

$$U(a)=\int_V G(a,q')\cdot\delta^{Т}\,dV'.$$

Сравнивая последние два равенства, получаем соотношение $U=m\cdot G(a, q)$, на котором основывался наш переход от (2.105) к уравнению (2.105') для $G(a, q)$. Это соотношение совпадает с равенством (2.103'), которое было получено ранее путем замены точечной массы объёмной без формального перехода к дельта-функции.

При $L_{qq'}\to 0$ $G(a, q')\to 1/L_{q'a}$, но это не мешает применению $(2.104')_2$ к функции $G(a, q')$, так как объёмный интеграл функции $1/L_{q'a}$ по окрестности точки a имеет ограниченное значение. (См. сказанное в разделе I, § 7 о потенциале U поля **f** внутри объёмной массы).

§ 9. ДОПОЛНЕНИЯ КО ВТОРОЙ ГЛАВЕ

I. Соотношение между полями точечной массы и диполя

Правую часть (2.51) можно рассматривать как приращение функции m/L_{qa}, соответствующее перемещению точки q по направлению l из положения q_1 в положение q_2 на расстояние dl. Следовательно, потенциал поля диполя

$$U^D=\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{m}{L_{qa}}\right)dl=\frac{\partial U^{\mathrm{T}}}{\partial l}\,dl=\left(\overset{q}{\nabla}U^{\mathrm{T}}\ \mathbf{dl}\right)\qquad(2.106)$$

или

$$U^D=\frac{1}{m}\left(\mathbf{p}\ \overset{q}{\nabla}U^{\mathrm{T}}\right)dl=\frac{p}{m}\ \overset{q}{\mathrm{grad}}_p\,U^{\mathrm{T}}=\frac{1}{m}\left(\mathbf{p}\ \overset{q}{\nabla}\right)U^{\mathrm{T}},\qquad(2.106')$$

где $U^{\mathrm{T}}=m/L_{qa}$ – потенциал поля точечной массы m, находящейся в точке q; U^D – потенциал поля, создаваемого диполем, находящимся в этой же точке и имеющим момент $\mathbf{p}=m\cdot\mathbf{dl}$; grad_p – компонента градиента по направлению момента $\mathbf{p}$ диполя.

Таким образом, потенциал поля диполя, находящегося в точке q, можно определить как скалярное произведение его момента $\mathbf{p}$ на градиент по точке q потенциала U^{T} поля $\mathbf{f}^{\mathrm{T}}$, которое мы имели бы, если бы в этой точке вместо диполя была единичная положительная точечная масса. Согласно $(1.126')_3$

$$\overset{q}{\nabla}\frac{m}{L_{qa}}=-\overset{a}{\nabla}\frac{m}{L_{qa}}=-\overset{a}{\nabla}U^{\mathrm{T}}=\mathbf{f}^{\mathrm{T}}.$$

Поэтому получаем из (2.106') согласно (2.54)

$$U^D=\frac{1}{m}\left(\mathbf{p}\ \mathbf{f}^{\mathrm{T}}\right)=\left(\mathbf{L}_{12}\ \mathbf{f}^{\mathrm{T}}\right)=L_{12}\cdot f_p^{\mathrm{T}}.\qquad(2.107)$$

Эта формула выражает потенциал поля диполя через напряжённость $\mathbf{f}^{\mathrm{T}}$ поля точечной массы.

Для определённости можно в (2.107) считать m=1 А·м, p=1 А·м^2, L_{12}=1 м. Тогда U^D – потенциал поля диполя с единичным моментом, а $\mathbf{f}^{\mathrm{T}}$ – напряжённость поля единичной положительной точечной массы.

II. Действие поля на диполь и двойной слой

Если диполь находится в поле $\mathbf{f}$, то на массы $m_1=-m$ и $m_2=m$ его полюсов действуют силы $\mathbf{F}'=-m\cdot\nu\cdot\mathbf{f}(q_1)$ и $\mathbf{F}''=m\cdot\nu\cdot\mathbf{f}(q_2)$, которые образуют главный вектор

$$\mathbf{F}=\mathbf{F}'+\mathbf{F}''=m\cdot\nu\cdot[\mathbf{f}(q_2)-\mathbf{f}(q_1)]\qquad(2.108)$$

и пару с моментом (вращения) относительно центра диполя q:

$$\mathbf{M}_{\text{вр}}=[\mathbf{L}_1\ \mathbf{F}']+[\mathbf{L}_2\ \mathbf{F}'']=m\cdot\nu\cdot([\mathbf{L}_2\ \mathbf{f}(q_2)]-[\mathbf{L}_1\ \mathbf{f}(q_1)]),\qquad(2.109)$$

где L_1 и L_2 – расстояния точек q_1 и q_2 от точки q (рис. 2.17, *а*).

Принимая во внимание, что разность $\mathbf{f}(q_2)-\mathbf{f}(q_1)$ представляет собой приращение вектора $\mathbf{f}$ на пути $dl=L_{12}$ по направлению l момента $\mathbf{p}$ диполя, имеем

$$\mathbf{f}(q_2)-\mathbf{f}(q_1)=\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial l}dl=\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial p}L_{12},\qquad(2.110)$$

где $\partial\mathbf{f}/\partial p$ – производная от вектора $\mathbf{f}$ по направлению вектора $\mathbf{p}$. Поэтому получаем из (2.108)

$$\mathbf{F} = m \cdot \nu \cdot L_{12} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial p} = \nu \cdot p \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial p} = \nu \cdot (\mathbf{p}\ \nabla) \cdot \mathbf{f}. \qquad (2.111)$$

Согласно (2.111) на диполь с моментом **p**, параллельным полю **f**, действует сила $\nu\cdot\mathbf{p}\cdot(\partial f/\partial l_f)$, стремящаяся двигать его по прямой, коллинеарной полю, в сторону усиления поля, сгущения силовых линий $l_{\nu f}$.

Сила **F**=0 при $\partial\mathbf{f}/\partial p$=0, т. е. когда вектор **f** не меняется по направлению момента диполя.

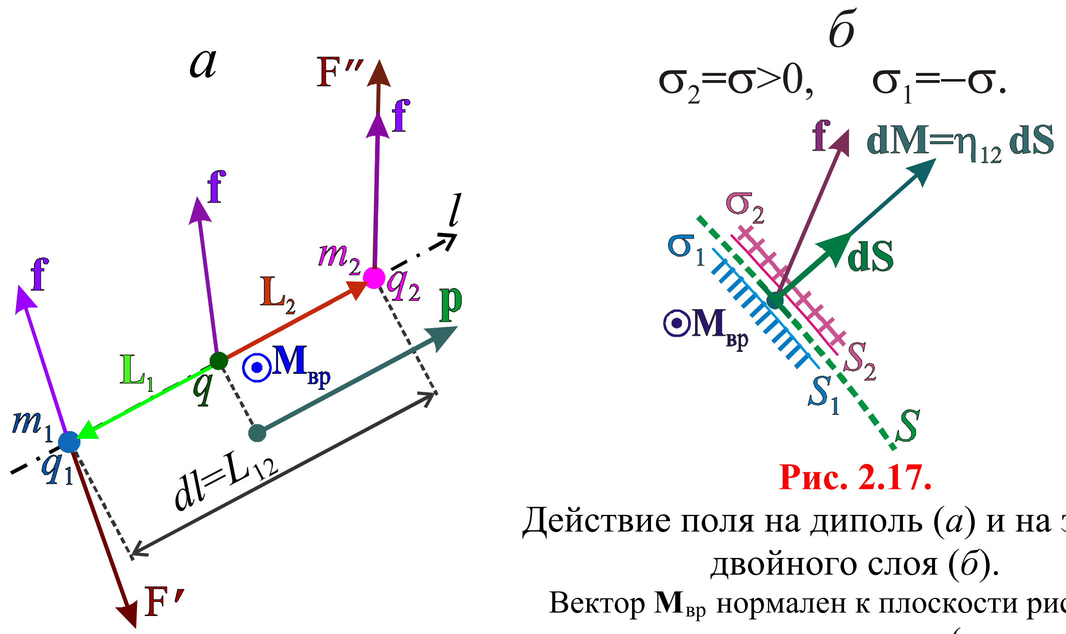

Рис. 2.17.
Действие поля на диполь (*а*) и на элемент двойного слоя (*б*).
Вектор $\mathbf{M}_{вр}$ нормален к плоскости рисунка и направлен в сторону читателя (точка в кружк*е*)

Подставляя в (2.109) $\mathbf{L}_2=(1/2)\cdot\mathbf{L}_{12}$, $\mathbf{L}_1=-(1/2)\cdot\mathbf{L}_{12}$, получаем

$$\mathbf{M}_{вр}=((\nu\cdot m)/2)\cdot[\mathbf{L}_{12}\ (\mathbf{f}(q_1)+\mathbf{f}(q_2))]=\nu\cdot m\cdot[\mathbf{L}_{12}\ \mathbf{f}^{ср}]=\nu\cdot[\mathbf{p}\ \mathbf{f}^{ср}],$$

где $\mathbf{f}^{ср}$ – среднее из значений **f** в точках q_1 и q_2. Но ввиду малости расстояния L_{12} имеем $\mathbf{f}^{ср}=\mathbf{f}(q)$ в центре диполя и, следовательно,

$$\mathbf{M}_{вр}=\nu\cdot[\mathbf{p}\ \mathbf{f}]. \qquad (2.112)$$

Момент $\mathbf{M}_{вр}$ обращается в нуль и, следовательно, диполь (с неподвижным центром q) находится в равновесии, когда угол (**p**, **f**) равен нулю или π. Но при угле (**p**, **f**), равном π, равновесие неустойчиво, так как пара сил, появляющаяся при отклонении диполя от этого положения на малый угол, вызывает увеличение этого угла. Согласно (2.112), поле **f** вращает диполь около оси, нормальной к плоскости, в которой лежат векторы **p** и **f**, стремясь уменьшить угол отклонения вектора **p** от вектора **f**.

Из изложенного выше следует, что поле **f** стремится упорядочить совокупность хаотически распределённых диполей, создавая в ней некоторое преимущественное направление дипольных моментов **p**.

Выше мы считали, что массы m_1 и m_2, образующие диполь, жёстко связаны между собой. Можно себе представить случай, когда эта связь как бы упругая. Тогда поле раздвигает массы m_1 и m_2, увеличивая момент диполя. Если в отсутствие поля L_{12}=0 и **p**=0, то под влиянием поля **f** получается сдвиг $\mathbf{L}_{12}$ и момент $\mathbf{p}$ по направлению поля тем большие, чем больше $\mathbf{f}$.

Рассматривая элемент двойного слоя (рис. 2.17, *б*) как диполь, можно к каждому элементу двойного слоя применить формулы (2.111) и (2.112) с подстановкой момента $\mathbf{dM}=\eta_{12}\cdot\mathbf{dS}$ вместо $\mathbf{p}$. Таким образом, в соответствии с (2.112) имеем

$$\mathbf{dM}_{\text{вр}}=\nu\cdot[\mathbf{dM}\ \mathbf{f}]=\nu\cdot\eta_{12}\cdot[\mathbf{dS}\ \mathbf{f}], \qquad \mathbf{M}_{\text{вр}}=\nu\cdot\int_S \eta_{12}\cdot[\mathbf{dS}\ \mathbf{f}], \tag{2.113}$$

где $\mathbf{M}_{\text{вр}}$ и $\mathbf{dM}_{\text{вр}}$ – вращающие моменты, действующие на двойной слой и его элемент.

III. Переход к полям Г, Е, Н

От формул, полученных в этой главе для поля $\mathbf{f}$, нетрудно перейти, согласно (2.9) и (2.13), к полю определённой природы: **Г**, **Е**, **Н**. Так, например,

$$\mathbf{E}=\mathbf{f}/(4\pi\cdot\varepsilon_0)\ \ \vee\ \ \mathbf{H}=\mathbf{f}/(4\pi). \tag{2.114}$$

Объединяя аналогичные формулы (выражения), относящиеся к полям различной природы (**Е** и **Н**), будем их разделять знаком **V** (или). Аналогично будем разделять приводимые в тексте парами обозначения, относящиеся к полям **Е** и **Н**, например, ε_0 **V** μ_0.

Вводя обозначения U_E и U_H для потенциалов полей **Е** и **Н**, имеем в соответствии с (2.35) и (2.114)

$$\mathbf{E}=-\nabla U_E,\ \ U_E=U/(4\pi\cdot\varepsilon_0)\ \ \vee\ \ \mathbf{H}=-\nabla U_H,\ \ U_H=U/(4\pi). \tag{2.115}$$

Аналогично получаем для гравитационного поля **Г** и его потенциала $U_Г$

$$\mathbf{Г}=-\gamma\cdot\mathbf{f}=\nabla U_Г,\ \ U_Г=\gamma\cdot U. \tag{2.115'}$$

Индексы при U впоследствии будем по возможности опускать. Уравнения (2.34), (2.85), $(2.89)_1$ и (2.46) с подстановкой (2.114) и $(2.115)_{2,4}$ имеют следующий вид:

$$\text{I. rot}\,\mathbf{E}=0,\ \ \text{II. div}\,\mathbf{E}=\delta_{\text{эл}}/\varepsilon_0,\ \ \text{Rot}\,\mathbf{E}=0,\ \ \text{Div}\,\mathbf{E}=\sigma_{\text{эл}}/\varepsilon_0,\ \ \nabla^2 U_E=-\delta_{\text{эл}}/\varepsilon_0. \tag{2.116}$$

$$\text{I. rot}\,\mathbf{H}=0,\ \ \text{II. div}\,\mathbf{H}=\delta_{\text{магн}},\ \ \text{Rot}\,\mathbf{H}=0,\ \ \text{Div}\,\mathbf{H}=\sigma_{\text{магн}},\ \ \nabla^2 U_H=-\delta_{\text{магн}}. \tag{2.116'}$$

Смысл величин $\delta_{\text{магн}}$, $\sigma_{\text{магн}}$ в (2.116') будет уточнён в § 2 главы третьей.

Согласно (2.114), (2.11), (2.8), (2.9), поле точечной массы e_q **V** m_q

$$\mathbf{E}(a)=\frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{e_q}{L_{qa}^3}\cdot\mathbf{L}_{qa}\ \ \vee\ \ \mathbf{H}(a)=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{m_q}{L_{qa}^3}\cdot\mathbf{L}_{qa} \tag{2.117}$$

действует на другую точечную массу e_a **V** m_a с силой ($\mathbf{E}\cdot e_a$ **V** $\mu_0\cdot\mathbf{H}\cdot m_a$):

$$\mathbf{F}_{qa}=\frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{e_q\cdot e_a}{L_{qa}^3}\cdot\mathbf{L}_{qa}\ \ \vee\ \ \mathbf{F}_{qa}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{m_q\cdot m_a}{L_{qa}^3}\cdot\mathbf{L}_{qa}. \tag{2.118}$$

Подставляя в (2.112), $(2.113)_2$ согласно (2.13) $\nu\cdot\mathbf{f}=\mu_0\cdot\mathbf{H}$, получаем выражения для вращающих моментов $\mathbf{M}_{\text{вр}}$, действующих на магнитный диполь и однородный магнитный листок (двойной слой) в однородном магнитном поле:

$$\mathbf{M}_{\text{вр}}=\mu_0\cdot[\mathbf{p}\ \mathbf{H}], \qquad \mathbf{M}_{\text{вр}}=\mu_0\cdot[\mathbf{M}\ \mathbf{H}], \tag{2.119}$$

где $\mathbf{M}$ – дипольный момент двойного слоя, определяемый согласно (2.61').

Общее для любого векторного поля **M** обозначение $\mathcal{E}$ напряжения $\int(\mathbf{M}\,\mathbf{dl})$ применялось в этой главе для напряжения в поле **f**. Отмечая индексами **f**, **E**, **H** обозначения $\mathcal{E}$, η для полей векторов **f**, **E**, **H**, имеем в соответствии с (2.114), (2.84')

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}^{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}^{\mathbf{f}} \quad \vee \quad \boldsymbol{\mathcal{E}}^{\mathbf{H}} = \frac{1}{4\pi}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}^{\mathbf{f}}, \qquad (2.120)$$

$$\eta_{12}^{\mathbf{E}} = -\varepsilon_0\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}_{12}^{\mathbf{E}} \quad \vee \quad \eta_{12}^{\mathbf{H}} = -\boldsymbol{\mathcal{E}}_{12}^{\mathbf{H}}. \qquad (2.120')$$

Глава третья. Статическое поле в присутствии среды

Расположенные определённым образом в пространстве тела, в которых или в присутствии которых изучаем поле (совокупность этих тел), образуют среду, влияющую в общем случае на поле. В этой главе пойдёт речь о статических электрическом и магнитном полях, о влиянии, которое оказывают на них некоторые тела: диэлектрики, проводники, магнетики (см. ниже). Гравитационное, поле не подверженное влиянию среды, в этой главе (за исключением раздела I, § 7) и в следующих главах не рассматривается: $\nu\cdot\mathbf{f}=\mathbf{E} \vee \mu_0\cdot\mathbf{H}$. Среду характеризует некоторый параметр $\Lambda=\varepsilon$, μ, γ или $\Lambda'=\chi$, æ, ρ, смысл которого выяснится в дальнейшем изложении. В разных точках среды параметр Λ может иметь разные значения. Вне тел, т. е. в вакууме, параметр Λ имеет всюду одно определённое (для данного вида тел и поля) значение: $\varepsilon=1$, $\mu=1$, $\gamma=0$, $\chi=0$, æ=0, $\rho=\infty$.

Среда в области V является *однородной*, если во всех точках этой области функция $\Lambda(a)$ имеет одно и то же значение, т. е. если в ней всюду $\nabla\Lambda=\text{grad}\,\Lambda=0$. Поверхность разрыва поля $\Lambda(a)$ называется *поверхностью раздела*; она разграничивает области пространства, в которых Λ имеет (вблизи неё) разные значения.

Поверхность раздела – граница между двумя областями пространства (средами, заполняющими эти области), т. е. поверхность, разделяющая эти области. Её аналогом на поверхности является линия раздела – граница между двумя участками поверхности, линия, разделяющая их. Термин «поверхность раздела», весьма чёткий и давно принятый в физике и геофизике, в литературе по разведочной геофизике, к сожалению, подвергается искажению и превращается в **неудачный термин «граница раздела»** (граница границы**!**).

В частности, поверхностями раздела являются поверхности тел, отделяющие их от окружающего пространства. *Кусочно-однородной* называют среду, если она состоит из порознь однородных частей, разграниченных поверхностями раздела. Если среда однородна всюду (во всём пространстве), то её называют неограниченной однородной средой. Вакуум можно рассматривать как частный случай однородной среды.

Неоднородную в области V среду называют градиентной, если в этой области вектор $\nabla\Lambda=\text{grad}\,\Lambda$ всюду имеет смысл (нет поверхностей разрыва Λ).

Если величина Λ не меняется в каком-либо направлении, то будем говорить, что среда однородна в этом направлении.

Среду будем, как правило, считать *изотропной*, т. е. будем полагать, что в любой точке среды её определяет скаляр Λ независимо от направления (см. § 1 главы четвертой).

Реальные среды, в частности такие среды, как горные породы, очень сложны. Поэтому в геофизике, как при решении прямых задач, так и при решении обратных задач, заменяют реальные среды *моделями среды*. Такие модели должны отражать основные характеристики (особенности "строения") среды, оказывающие существенное влияние на поле.

Применяют различные классификации моделей среды. Приведём примеры. Как уже было сказано выше, различают, например, *изотропные* и *анизотропные* среды. Анизотропия горных пород может быть обусловлена разными их особенностями:

трещиноватостью, рассланцёванностью, микрослоистостью. В отличие от изотропных моделей среды у анизотропных моделей параметры Λ зависят от направления. Для изотропных моделей среды Λ – скалярное поле, а для анизотропных моделей среды Λ – тензорное поле (см. главу четвёртую).

Выше также уже было сказано о том, что различают *кусочно-однородные* и *градиентные* модели среды. Приведём ещё одну классификацию моделей среды по степени "сложности их геометрического строения".

О самой простой модели среды – неограниченной (безграничной) однородной среде уже было сказано. У такой модели среды во всём пространстве grad Λ=0. На рис. 3.1 приведено несколько примеров кусочно-однородных моделей среды.

1). 1D- модель среды. Это означает, что может быть выбрана такая система координат ξ_1, ξ_2, ξ_3, чтобы параметр среды Λ зависел только от одной координаты. На рис. 3.1, *а* приведен пример (применяемой в теории "структурных" методов геофизики) *горизонтально-слоистой* модели среды. В декартовых, либо в цилиндрических, координатах с осью Z по нормали к плоскопараллельным границам слоёв параметр среды

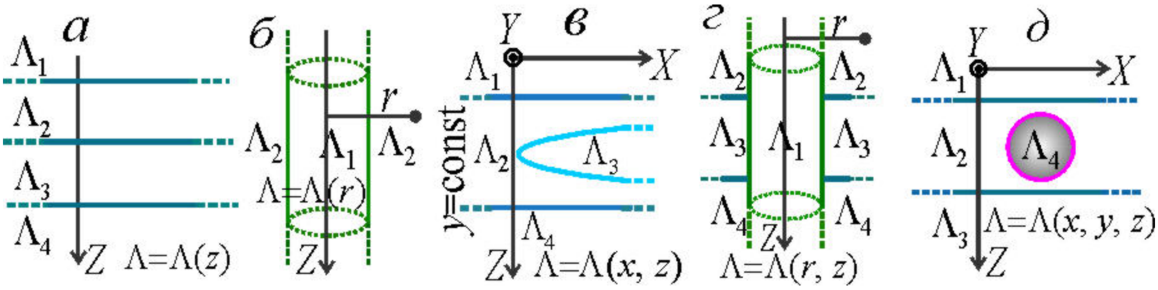

Рис. 3.1.

Примеры 1-D (*а*, *б*), 2-D (*в*, *г*) и 3-D (*д*) моделей среды

Λ зависит только от координаты z. На рис. 3.1, *б* показан пример (применяемой в теории геофизических методов исследований скважин) 1D- модели среды с цилиндрической границей. В цилиндрических координатах с осью Z по оси (неограниченного по высоте) кругового цилиндра параметр Λ зависит только от координаты r.

Заметим, что для 1D- моделей среды решения прямых задач теории геофизических методов могут быть получены в аналитическом виде. Иными словами при решении прямых задач искомые характеристики поля могут быть определены в явном виде: выражены через параметры заданного возбудителя поля и модели среды.

2). 2D- модель среды. Для таких моделей среды может быть выбрана такая система координат, в которой параметр Λ зависит от двух координат. На рис. 3.1, *в* в декартовых координатах $\Lambda=\Lambda(x, z)$, то есть модель среды одинакова в любой плоскости y=const. На рис. 3.1, *г* для осесимметричной модели среды в цилиндрических координатах r, φ, z при соответствующем выборе оси Z для Λ имеем: $\Lambda=\Lambda(r, z)$, то есть Λ не зависит от координаты φ; модель среды - одинакова в любой полуплоскости φ=const.

3). 3D- модель среды. Параметр Λ в любой системе координат зависит от трёх координат (рис. 3.1, *д*).

Заметим, что для 2D- и 3D- моделей среды решения прямых задач не могут быть получены в аналитическом виде. Для их решения применяют численные методы.

§ 1. ВЛИЯНИЕ СРЕДЫ

Опыт показывает, что многие тела, сами по себе не создающие поля **f**, будучи помещены в это поле, влияют на него, меняя его направление и абсолютную величину. Тела, которые так ведут себя в магнитном поле, называют *м а г н е т и к а м и*, а в электрическом поле – *п р о в о д н и к а м и* и *д и э л е к т р и к а м и*. Влияние проводников и диэлектриков на электрическое поле при детальном изучении оказывается весьма различным. Различного типа магнетики (парамагнетики, диамагнетики, ферромагнетики) также по-разному ведут себя в магнитном поле. Будем иметь в виду *п а р а м а г н е т и к и* и *и д е а л и з и р о в а н н ы е ф е р р о м а г н е т и к и* (см. замечание 3, § 2).

В молекулах, из которых построены все вещества, есть электрические микрозаряды обоих знаков и, если, несмотря на это, тело не создаёт вокруг себя электрическое поле, то объясняется это тем, что в каждом элементе dV его объёма алгебраическая сумма масс (зарядов) и векторная сумма дипольных моментов равны нулю, т. е. заряд и дипольный момент каждого элемента dV объёма равны нулю. При внесении диэлектрика в электрическое поле каждый элемент dV его объёма (совокупность зарядов, находящихся в этом элементе) приобретает некоторый дипольный момент $\mathbf{dM}$. Механизм этого явления, называемого *п о л я р и з а ц и е й д и э л е к т р и к а* в электрическом поле, может быть разным. В некоторых диэлектриках молекулы приобретают дипольные моменты под действием поля. В других диэлектриках они и без воздействия доля имеют дипольные моменты, которые внутри каждого элемента объёма распределены в равномерном беспорядке и поэтому их суммарный дипольный момент равен нулю. Но в таких диэлектриках, благодаря ориентирующему действию поля (см. раздел II, § 9 главы второй и рис. 2.17, *а*), направления моментов диполей в среднем становятся параллельными полю, причём среднее значение этих моментов в элементе dV оказывается тем большим, чем больше напряжённость поля в этом элементе. В том и другом случае в каждом элементе объёма dV поляризованного тела имеются «молекулярные» диполи с моментами $\mathbf{p}_{\text{мо}}$, суммой которых является момент $\mathbf{dM}$ этого элемента.

Совсем иной является природа *п о л я р и з а ц и и* (*н а м а г н и ч е н и я*) *м а г н е т и к о в* в магнитном поле. Но формально она может быть (и в своё время была) истолкована аналогично явлению поляризации диэлектриков в электрическом поле. Согласившись условно применять физически фиктивное понятие магнитной массы, аналогичной электрическому заряду, будем, продолжая эту аналогию, придерживаться толкования магнитной поляризации (намагничения) как упорядочения совокупности магнитных диполей, якобы находящихся в магнетике (см. главу пятую и рис. 3.2).

В первых четырёх параграфах этой главы будет идти речь об электрическом поле $\mathbf{E}$, создаваемом электрическими массами $m_{\text{эл}}$ т. е. зарядами e в присутствии диэлектриков, и о магнитном поле $\mathbf{H}$, создаваемом магнитными массами $m_{\text{магн}}$ (магнитными полюсами, магнитами) в присутствии магнетиков. С § 5 будут введены в рассмотрение также проводники.

Влияние *п о л я р и з у ю щ е г о с я т е л а* (способного поляризоваться, т. е. диэлектрика, магнетика) на поле $\mathbf{f}$ объясняется тем, что элементы тела, поляризуясь в этом поле, приобретают дипольные моменты и как диполи создают *вторичное поле* $\mathbf{f}^{\text{втр}}$. Оно прибавляется к *первичному* («внешнему») *полю* $\mathbf{f}^{\text{прв}}$, в которое тело было внесено, в результате чего получается фактически наблюдаемое *суммарное поле*

$$\mathbf{f}=\mathbf{f}^{\text{прв}}+\mathbf{f}^{\text{втр}}, \tag{3.1}$$

отличающееся от первичного поля.

Термин «первичное поле» имеет условный смысл. Например, при изучении влияния нарушения однородности среды на поле первичным называют то поле, которое было бы при отсутствии этого нарушения. Соответственно, условный смысл имеет термин «вторичное поле».

I. Поляризация

Элемент объёма dV поляризованного (намагниченного) тела имеет дипольный момент

$$\mathbf{dM} = \mathbf{P}\cdot dV, \qquad \mathbf{P} = \begin{cases} \mathbf{P}_{\text{эл}} & \text{– электрическая поляризация,} \\ \mathbf{J} & \text{– магнитная поляризация.} \end{cases} \tag{3.2}$$

Вектор **P**, называемый *поляризацией* (в смысле поляризованности, а не действия), представляет собой дипольный момент элемента объёма, отнесённый к единице объёма, или (менее точно) дипольный момент единицы объёма. Его можно также назвать объёмной плотностью дипольных моментов: $\mathbf{P}=\mathbf{dM}/dV$. Магнитную поляризацию (поляризованность) называют *намагниченностью*. Индекс «эл» при **P** будем опускать там, где он не необходим для отличия $\mathbf{P}_{\text{эл}}$ от **J**.

Различают два основных типа *поляризации диэлектриков*.

1). Поляризация смещения. Электрически нейтральные атомы имеют положительно заряженное ядро и отрицательно заряженную электронную оболочку. У таких атомов суммарный электрический заряд $\Sigma de=0$ (рис. 3.2, *а*). Но под действием электрического поля **E**, оказывающего силовое действие на электрические заряды, нарушается симметрия электрических зарядов в атомах так на положительные и отрицательные микроскопические заряды действуют противоположно направленные силы. Схематично это явление показано на рис. 3.2, *б*. В результате такого воздействия каждый атом (и каждый, заполненный такими атомами, элементарный объём dV поляризованной среды) становится подобным электрическому диполю.

2). У электрически нейтральных молекул положительно - и отрицательно заряженные ионы могут быть расположены не симметрично относительно центра таких молекул. Примером такого типа молекул являются молекулы воды H_2O, которые (в первом приближении) могут быть аппроксимированы элементарными электрическими диполями (см. рис. 2.13, *г*). В отсутствие поля **E** такие молекулы расположены "в равномерном беспорядке" (рис. 3.2, *в*) и не создают электрического поля. Но в присутствии поля **E** (рис. 3.2, *г*) на положительные и отрицательные микроскопические заряды действуют силы (см. раздел II § 9 главы второй и рис. 2.17, *а*). Это вызывает некоторую "упорядоченность" в ориентации дипольных моментов микроскопических диполей, чему частично препятствует хаотическое (тепловое) движение молекул.

Намагничение магнетиков может быть обусловлено различными физическими явлениями. Но в приближении кулоновой модели магнетизма каждая молекула магнетика (по аналогии со случаем ориентационной поляризации диэлектрика) может быть уподоблена микроскопическому магнитному диполю с полюсами ***N*** и ***S*** (рис. 3.2, *д*). В отсутствие магнитного поля **H**, **B** и постоянной намагниченности такие (хаотически распределённые в среде) диполи не создают магнитного поля. Но под действием магнитного поля (или при постоянной намагниченности) магнитные моменты микроскопических магнитных диполей ориентированы, преимущественно, в каком либо одном направлении (рис. 3.2, *е*).

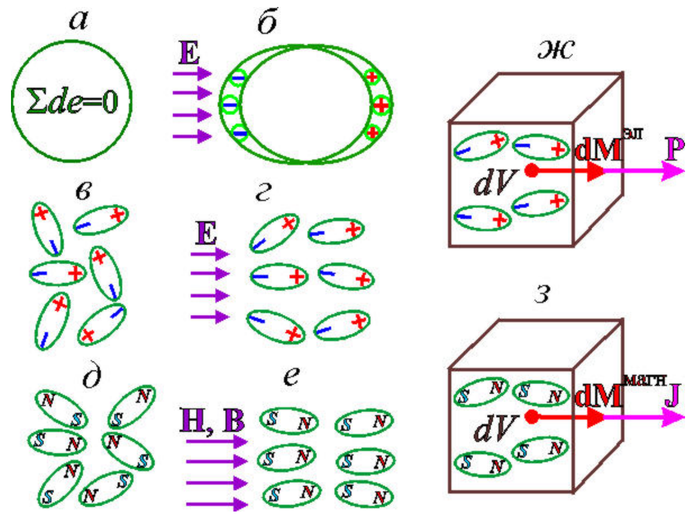

Рис. 3.2.
Поляризация смещения (*а*, *б*) и ориентационная поляризация (*в*, *г*); кулонова модель намагничения (*д*, *е*); вектор поляризации **P** (*ж*) и вектор намагниченности **J** (*з*)

В случаях, показанных на рис. 3.2, *ж*, *з*, каждый элементарный объём dV поляризованной или намагниченной среды имеет дипольный момент **dM**: электрический дипольный момент $\mathbf{dM}^{эл}$ в поляризующейся среде или магнитный дипольный момент $\mathbf{dM}^{магн}$ в намагничивающейся среде. Поляризацию и намагниченность среды характеризуют соответственно вектор поляризации **P** и вектор намагниченности **J**: $\mathbf{P}=\mathbf{dM}^{эл}/dV$, $\mathbf{J}=\mathbf{dM}^{магн}/dV$.

Если область V среды объёмом в 1 м^3 поляризована или намагничена однородно, то векторы **P** или **J** численно равны соответственно электрическому или магнитному дипольным моментам такой области V.

В соответствии со сказанным выше поляризация среды **P** в точке *a* должна находиться в прямой зависимости от поля **f** в этой точке. Считая эту зависимость линейной, положим

$$\mathbf{P}(a)=\mathbf{P}^{вр}(a)+\mathbf{P}^{0}(a), \qquad \mathbf{P}^{вр}(a)=\alpha(a)\cdot\mathbf{f}(a), \tag{3.3}$$

где $\alpha(a)$ – множитель, характеризующий среду в точке *a*; $\mathbf{P}^0(a)$ – постоянная (самопроизвольная, остаточная) поляризация, не меняющаяся с изменением поля $\mathbf{f}(a)$ и сохраняющаяся при $\mathbf{f}(a)=0$; $\mathbf{P}^{вр}(a)$ – «вр***е***менная» поляризация, исчезающая с исчезновением поля $\mathbf{f}(a)$.

При расчётах поля (при решении прямых задач) постоянную поляризацию $\mathbf{P}^0$ можно задавать произвольно, а временную поляризацию $\mathbf{P}^{вр}$ произвольно задавать нельзя, так как она зависит от поля **f**.

Дипольный момент **dM** имеет размерность массы, умноженной на расстояние, поэтому согласно (3.2) величина **P** имеет такую же размерность, как **f** (масса, делённая на квадрат расстояния), следовательно, множитель α в (3.3) – безразмерный, но для полей **E** и **H** он имеет разные значения: α_E и α_H. Векторы **P**, $\mathbf{P}^{вр}$, $\mathbf{P}^0$ в общем случае являются функциями точки и определяют поляризованность среды в окрестности этой точки. Поляризацию в области *V* называют *однородной*, а среду в этой области – *однородно поляризованной*, если во всех точках этой области вектор **P** имеет одно и то же значение.

II. Потенциал поля, создаваемого поляризованной средой

Согласно (2.58), (3.2), $(1.127)_2$ потенциал $dU^п$ поля $\mathbf{df}^п$, создаваемого элементом объёма dV поляризованного тела, определяет формула

$$dU^{\text{п}}(a)=\frac{\left(\mathbf{dM}\ \mathbf{L}_{qa}\right)}{L_{qa}^3}=\frac{\left(\mathbf{P}(q)\ \mathbf{L}_{qa}\right)}{L_{qa}^3}\,dV=\left(\mathbf{P}(q)\ \overset{q}{\nabla}\frac{1}{L_{qa}}\right)dV, \qquad (3.4)$$

где L_{qa} – расстояние от точки q, которой определяется положение элемента dV, до точки a (рис. 3.3), Следовательно, поляризованное тело, занимающее область V, создаёт поле с потенциалом $U^{\text{п}}$ в точке a

$$U^{\text{п}}(a)=\int\limits_V\frac{\left(\mathbf{dM}\ \mathbf{L}_{qa}\right)}{L_{qa}^3}=\int\limits_V\frac{\left(\mathbf{P}(q)\ \mathbf{L}_{qa}\right)}{L_{qa}^3}\,dV=\int\limits_V\left(\mathbf{P}\ \overset{q}{\nabla}\frac{1}{L_{qa}}\right)dV \qquad (3.4')$$

и с напряжённостью $\mathbf{f}^{\text{п}}(a)=-\text{grad}\,U^{\text{п}}(a)$.

На расстоянии L_{oa} от поляризованного тела (от некоторой его точки o), достаточно большом по сравнению со всеми линейными размерами тела, имеем согласно (3.4') в соответствии с (2.58)

$$U^{\text{п}}(a)=\frac{1}{L_{qa}^3}\left(\mathbf{L}_{oa}\ \int\limits_V\mathbf{P}\,dV\right)=\frac{\left(\mathbf{M}\ \mathbf{L}_{oa}\right)}{L_{oa}^3}, \qquad (3.4'')$$

где $\mathbf{M}$ – дипольный момент поляризованного тела, определяемый формулами

$$\mathbf{M}=\int\limits_V\mathbf{P}\ dV, \qquad \mathbf{M}=\mathbf{P}\cdot V, \qquad (3.2')$$

из которых вторая формула соответствует случаю однородной поляризации.

Для однородности поляризации тела достаточно однородности тела ($\nabla\alpha=\text{grad}\,\alpha=0$) и полей $\mathbf{f}$ и $\mathbf{P}^0$ в нём. Легко определить поле $\mathbf{f}=\mathbf{P}/\alpha$ (при $\mathbf{P}^0=0$) под действием которого происходит некоторая поляризация тела. Нетрудно (в принципе) также определить, первичное поле

$$\mathbf{f}^{\text{прв}}=\mathbf{f}-\mathbf{f}^{\text{втр}}=\mathbf{P}/\alpha+\text{grad}\,U^{\text{п}}, \qquad (3.4''')$$

необходимое для получения желательной и, в частности, однородной, поляризации заданного тела. Для этого надо только подставить в формулы (3.4') и (3.4''') заданную функцию α и желательное поле $\mathbf{P}$ и выполнить операции, указанные в этих формулах. Но определить поляризацию тела, внесённого в заданное поле $\mathbf{f}^{\text{прв}}$ (даже если оно однородно), в общем случае трудно.

В формуле $(3.3)_2$, выражающей столь простую зависимость поля $\mathbf{P}$ от поля $\mathbf{f}$, имеется в виду не первичное поле, в которое внесено поляризуемое тело, а поле $\mathbf{f}=\mathbf{f}^{\text{втр}}+\mathbf{f}^{\text{прв}}$. Это суммарное поле фактически действует внутри и вне области V, занятой телом, и оно поляризует его, т. е. $\mathbf{P}=\alpha\cdot\mathbf{f}^{\text{прв}}+\alpha\cdot\mathbf{f}^{\text{втр}}+\mathbf{P}^0$. Поэтому если даже поля $\mathbf{f}^{\text{прв}}$ и $\mathbf{P}^0$ однородны и $\nabla\alpha=0$, то в общем случае произвольной формы тела поле $\mathbf{f}^{\text{втр}}$ и, следовательно, поле $\mathbf{P}$ оказываются неоднородными.

Случай, когда тело однородно и имеет эллипсоидальную форму, является особым. Такое тело в однородном поле $\mathbf{f}^{\text{прв}}$ поляризуется однородно. Это, очевидно, верно, в частности, для шара, а также для предельных случаев: эллиптического (или кругового) цилиндра и плоскопараллельного слоя.

III. Связанные массы (источники поля)

Выражение (3.4') для потенциала поля $\mathbf{f}^{\text{п}}$, создаваемого поляризованной средой, можно согласно (1.135) представить в виде

$$U^{\text{п}}(a) = \int\limits_V \operatorname{div} \frac{\mathbf{P}}{L_{qa}} dV - \int\limits_V \frac{\operatorname{div}\mathbf{P}}{L_{qa}} dV \tag{3.5}$$

или, применяя теорему Гаусса - Остроградского, в виде

$$U^{\text{п}}(a) = \oint\limits_{S[V]} \frac{(\mathbf{P}\ d\mathbf{S})}{L_{qa}} + \int\limits_V \frac{-\operatorname{div}\mathbf{P}}{L_{qa}} dV. \tag{3.5'}$$

Интегрирование и дифференцирование в первом члене правой части (3.5) производятся по одному и тому же аргументу (по точке q), что необходимо для применения теоремы Гаусса - Остроградского.

Допустим, что в области V, ограниченной поверхностью $S[V]$, имеются поверхности S, являющиеся особыми в поле вектора $\mathbf{P}$, например, поверхности разрыва какой-либо из величин α, $\mathbf{f}$ или $\mathbf{P}^0$, от которых зависит поляризация $\mathbf{P}$. Выделим поверхности S из области V, охватив их поверхностями безопасности S_0, и получим вместо области V область V^* (в которой обеспечена применимость теоремы Гаусса - Остроградского), ограниченную поверхностью $S[V^*]$, состоящей из поверхностей $S[V]$ и S_0. Стягивая каждую поверхность S_0 к охватываемой ею поверхности S, мы превращаем её в совокупность сторон S_1 и S_2 поверхности S (на рис. 3.3 расстояние $L_{12}\to 0$). При этом область $V^*\to V$ и, следовательно, область объёмного интегрирования в (3.5') остаётся без изменения; что же касается поверхностного интегрирования, то оно должно быть распространено не только на поверхность $S[V]$, но также на S_1 и S_2. Обозначая индексами 1 и 2 величины, относящиеся к областям V_1 и V_2, разделяемым поверхностью S, получаем из (3.5')

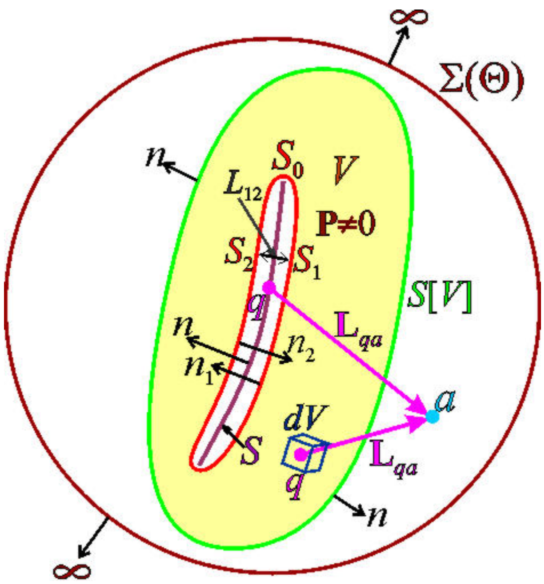

Рис. 3.3.
Элемент dV поляризованной среды и поверхность S разрыва её поляризации, создающие поле в точке a

$$U^{\text{п}}(a) = \int\limits_V \frac{-\operatorname{div}\mathbf{P}}{L_{qa}} dV + \int\limits_{S_1} \frac{(\mathbf{P}^{(1)}\ d\mathbf{S})}{L_{qa}} + \int\limits_{S_2} \frac{(\mathbf{P}^{(2)}\ d\mathbf{S})}{L_{qa}} + \oint\limits_{S[V]} \frac{(\mathbf{P}\ d\mathbf{S})}{L_{qa}}. \tag{3.5''}$$

Распространим область V на всё пространство и примем во внимание, что согласно (3.3) величины P и f имеют одинаковый порядок. Поэтому, считая поле $\mathbf{f}$ регулярным на бесконечности (см. раздел IV, § 2 главы второй), можем последний член правой части (3.5'') отбросить. Что же касается второго и третьего членов правой части (3.5''), то, учитывая, что при поверхностном интегрировании надо направлять нормали n наружу относительно области V^*, имеем

$$\int_{S_1} \frac{\left(\mathbf{P}^{(1)}\,\mathbf{dS}\right)}{L_{qa}} + \int_{S_2} \frac{\left(\mathbf{P}^{(2)}\,\mathbf{dS}\right)}{L_{qa}} = \int_{S} \frac{\left(\mathbf{P}^{(1)}\,\mathbf{n}_1\right)+\left(\mathbf{P}^{(2)}\,\mathbf{n}_2\right)}{L_{qa}} dS = \int_{S} \frac{P_n^{(1)} - P_n^{(2)}}{L_{qa}} dS, \quad (3.5''')$$

где $\mathbf{n}_1=\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}_2=-\mathbf{n}$ – единичные нормали к поверхностям S_1 и S_2, а n – нормаль к поверхности S, направленная от S_1 к S_2 (см. рис. 3.3).

Таким образом, пользуясь обозначением (1.49), получаем из (3.5'')

$$U^{\text{п}}(a) = \int_V \frac{-\operatorname{div}\mathbf{P}}{L_{qa}} dV + \int_S \frac{-\operatorname{Div}\mathbf{P}}{L_{qa}} dS = \int_V \frac{-\operatorname{div}\mathbf{P}}{L_{qa}} dV + \int_S \frac{-\left(P_n^{(2)} - P_n^{(1)}\right)}{L_{qa}} dS, \quad (3.6)$$

где S – совокупность всех поверхностей разрыва нормальной компоненты P_n вектора $\mathbf{P}$. Распространяя область V на всё пространство (на рис. 3.3 $\Sigma[\Theta]\to\infty$), мы включаем в неё поляризованные тела, а также области, в которых нет поляризованной среды. Но объёмное интегрирование по этим областям, в которых $\mathbf{P}=0$, не влияет на результат интегрирования.

Поверхность поляризованного тела представляет собой частный случай поверхности разрыва вектора $\mathbf{P}$. Обозначая индексом 1 область, занятую поляризованным телом, и полагая $\mathbf{P}^{(1)}=\mathbf{P}$, имеем на его поверхности

$$-\operatorname{Div}\mathbf{P}=\mathbf{P}_n^{(1)}-\mathbf{P}_n^{(2)}=\mathbf{P}_n, \quad (3.7)$$

где нормаль n направлена от тела наружу.

Сопоставляя (3.6) с выражениями (2.44'') для потенциалов полей, создаваемых различными массами, мы видим, что интегралы в (3.6) можно рассматривать как потенциалы полей некоторых объёмных и поверхностных масс с плотностями $-\operatorname{div}\mathbf{P}$ и $-\operatorname{Div}\mathbf{P}$, появляющихся в области V и на её границе в результате поляризации среды, заполняющей область V. Будем эти массы называть *с в я з а н н ы м и*. Вводя обозначения

$$-\operatorname{div}\mathbf{P}=\delta_{\text{свз}}, \qquad -\operatorname{Div}\mathbf{P}=\sigma_{\text{свз}}, \quad (3.8)$$

получаем из (3.6)

$$U^{\text{п}}(a) = \int_V \frac{\delta_{\text{свз}}}{L_{qa}} dV + \int_S \frac{\sigma_{\text{свз}}}{L_{qa}} dS. \quad (3.6')$$

Величины $\delta_{\text{свз}}$ и $\sigma_{\text{свз}}$, определяемые формулами (3.8), будем называть плотностями связанных объёмных и поверхностных масс. Согласно (1.88) из $(3.8)_1$ следует, что объёмные связанные массы отрицательны там, где поток вектора $\mathbf{P}$ через поперечное сечение векторной трубки поля $\mathbf{P}$ увеличивается по направлению этого поля, и положительны там, где этот поток уменьшается по направлению поля $\mathbf{P}$. В соответствии с $(3.8)_2$ плотность поверхностных связанных масс положительна при $P_n^{(2)}<P_n^{(1)}$. На поверхности поляризованного тела согласно (3.7) и $(3.8)_2$ имеем связанные поверхностные массы с плотностью

$$\sigma_{\text{свз}}=P_n, \quad (3.8')$$

положительной в тех точках поверхности тела, в которых вектор $\mathbf{P}$ направлен наружу, и отрицательной в точках этой поверхности, в которых вектор $\mathbf{P}$

направлен внутрь тела.

На рис. 3.4 схематично показано то, почему в поляризующейся (намагничивающейся) среде могут существать связанные источники поля. На рис. 3.4, *а* видно что, если в малой окрестности точки в поляризованной среде div **P**>0, то в соответствии с $(3.8)_1$, в этой окрестности существуют связанные заряды с плотностью $\delta_{\text{свз}}<0$.

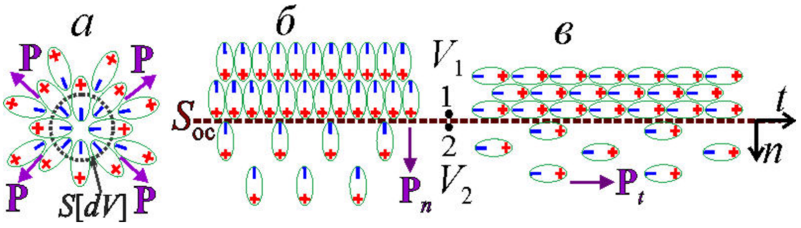

Рис. 3.4.
Иллюстрации к выражениям (3.7) - (3.8) для плотностей связанных источников поля

Особая поверхность $S_{\text{ос}}$ на рис. 3.4, *б, в* разделяет области пространства V_1, V_2, в которых абсолютная величина P вектора **P** имеет разные значения. Нормаль n к $S_{\text{ос}}$ направлена из области V_1 в область V_2, а t – любое направление, касательное к $S_{\text{ос}}$. В показанном на этом рисунке случае абсолютная величина вектора поляризации в области V_1 больше, чем в области V_2 ($P^{(1)}>P^{(2)}$).

На рис. 3.4, *б*, векторы поляризации направлены по нормали n, то есть в точках "1", "2" $\mathbf{P}^{(1)}=\mathbf{P}_n^{(1)}$, $\mathbf{P}^{(2)}=\mathbf{P}_n^{(2)}$, а скалярные компоненты $P_n^{(1)}>0$, $P_n^{(2)}>0$, причём $P_n^{(1)}>P_n^{(2)}$. При этом $P_n^{(2)}-P_n^{(1)}<0$ и, в соответствии с (3.7) - (3.8), на $S_{\text{ос}}$ существуют связанные поверхностные массы (заряды) с плотностью $\sigma_{\text{свз}}>0$. См. также рис. 3.5.

На рис. 3.4, *в* векторы поляризации направлены по касательной к поверхности $S_{\text{ос}}$: $\mathbf{P}^{(1)}=\mathbf{P}_t^{(1)}$, $\mathbf{P}^{(2)}=\mathbf{P}_t^{(2)}$. В точках "1", "2" $\mathbf{P}_n^{(1)}=0$, $\mathbf{P}_n^{(2)}=0$ и, в соответствии с (3.7) - (3.8), на $S_{\text{ос}}$ нет связанных поверхностных источников поля (нет избытка зарядов одного знака).

Если внутри, поляризованного тела div **P**=0 и Div **P**=0, что, в частности, имеем в случае однородной поляризации тела, то связанные массы имеются только на его поверхности; создаваемое ими поле определяется этой поверхностью (её формой и размерами) и значениями P_n на ней.

Приведём примеры.

1. Пусть N – число молекулярных диполей в элементе объёма dV поляризованной среды, а $m^+_{\text{мо}}$, $\mathbf{p}_{\text{мо}}$ и $L_{\text{мо}}$ – средние значения массы положительного полюса диполя, его дипольного момента и расстояния между его полюсами. Тогда элемент объёма dV этой среды имеет дипольный момент

$$\mathbf{dM}=N\cdot\mathbf{p}_{\text{мо}}\cdot dV=N\cdot m^+_{\text{мо}}\cdot\mathbf{L}_{\text{мо}}\cdot dV=\mathbf{L}_{\text{мо}}\cdot dm^+=\delta^+\cdot\mathbf{L}_{\text{мо}}\cdot dV, \qquad (3.8'')$$

где $dm^+=N\cdot m^+_{\text{мо}}\cdot dV$ – масса положительных полюсов диполей, находящихся в элементе объёма; δ^+ – объёмная плотность этой массы, т. е. произведение массы положительного полюса на число диполей в единице объёма.

Сравнивая (3.8") с (3.2), мы видим, что поляризация

$$\mathbf{P}=\delta^+\cdot\mathbf{L}_{\text{мо}}. \qquad (3.9)$$

Обозначая через m^+ сумму масс dm^+ в области V и подставляя (3.9) в формулы (3,2'), получаем для дипольного момента поляризованного тела соответствующие выражения

$$\mathbf{M}=\int_V \mathbf{L}_{\text{мо}}\cdot\delta^+\,dV, \quad \mathbf{M}=\mathbf{L}_{\text{мо}}\cdot\int_V \delta^+\,dV=m^+\cdot\mathbf{L}_{\text{мо}}, \qquad (3.6')$$

из которых второе выражение соответствует случаю однородной поляризации.

В этом случае представим, что в области V, которую тело занимало до поляризации, мы имели две объёмные массы ($m^{+}>0$ и $m^{-}=-m^{+}$), равномерно распределённые в ней с плотностями δ^{+} и δ^{-}. В соответствии с замечанием 2, § 5 главы второй допустим, что масса m^{+} сдвигается на малое расстояние $L_{\text{мо}}/2$ по направлению вектора $\mathbf{P}$, а масса m^{-} – на такое же расстояние в противоположном направлении, в результате чего нарушается полное совмещение масс разного знака и их полная взаимная нейтрализация. Сдвинутые массы m^{+} и m^{-} занимают области V^{+} и V^{-}, не полностью совпадающие, и, таким образом, у поверхности поляризованного тела образуется слой переменной толщины

$$h=L_{\text{мо}}\cdot|\cos(\mathbf{P},\mathbf{n})|=(P/\delta^{+})\cdot|\cos(\mathbf{P},\mathbf{n})|=|P_n|/\delta^{+}, \qquad (3.10)$$

в пределах которого имеется масса с объёмной плотностью $\delta=\delta^{+}\cdot\operatorname{sgn}P_n$. Этот слой ввиду малости его толщины и можно, согласно (2.6), заменить поверхностной массой с плотностью $\sigma=h\cdot\delta=|P_n|\cdot\operatorname{sgn}P_n=P_n$ в соответствии с (3.8').

2. Пусть тела I и II порознь однородно поляризованы по направлению оси Z, а $\mathbf{P}^{(1)}$ и $\mathbf{P}^{(2)}$ – их поляризации (рис. 3.5). На обращённых друг к другу и нормальных к оси Z гранях S_1 и S_2 этих тел имеем поверхностные массы с плотностями $\sigma_1=P_z^{(1)}$ и $\sigma_2=-P_z^{(2)}$. Приведём тела I и II в соприкосновение по этим граням и получим тело, состоящее из двух частей (I и II), разделённых участком S плоскости, на которой компонента P_z терпит разрыв $P_z^{(2)}-P_z^{(1)}$. На S имеем поверхностную массу с плотностью $\sigma_{\text{свз}}=\sigma_1+\sigma_2=P_z^{(1)}-P_z^{(2)}$, что соответствует формуле $(3.8)_2$, так как в данном случае нормаль n к поверхности S направлена по оси Z и, следовательно, $P_z=P_n$.

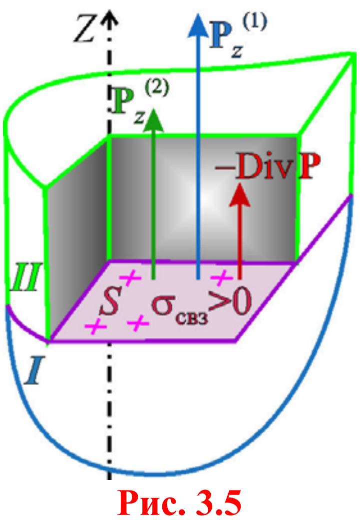

Рис. 3.5

Связанные массы на поверхности S разрыва вектора $\mathbf{P}$, нормального к этой поверхности. Для наглядности скаляр $-\mathrm{Div}\,\mathbf{P}$ показан стрелкой, как вектор $\mathbf{P}_n^{(1)}-\mathbf{P}_n^{(2)}$

3. Теперь представим себе тело, состоящее из нормальных к оси Z плоскопараллельных слоев одинаковой толщины, порознь однородно поляризованных по направлению оси Z с одинаковыми разрывами компоненты P_z на границах слоёв. Выделим из тела прямой цилиндр с высотой h и с основаниями S' и S'', параллельными этим границам, и допустим, что между ними проходит k границ. Если P_z' и P_z'' – значения компоненты P_z у оснований цилиндра S' и S'' (т. е. в слоях, прилегающих к этим основаниям), то на каждой границе имеем разрыв компоненты P_z, равный $(P_z''-P_z')/k$ и, следовательно, поверхностную массу с плотностью $\sigma=-(P_z''-P_z')/k$. Если S – площадь основания цилиндра, то в нём содержится масса $m=k\cdot\sigma\cdot S=-(P_z''-P_z')\cdot S$.

Уменьшая толщину слоёв и соответственно увеличивая их число, получаем в пределе вместо ступенчатого изменения величины P_z её плавное линейное изменение по направлению Z и можем считать приращение $P_z''-P_z'=h\cdot\partial P_z/\partial z$ и, следовательно, массу $m=-h\cdot S\cdot\partial P_z/\partial z=-V\cdot\partial P_z/\partial z$. Таким образом, при $k\to\infty$ мы вместо поверхностных масс имеем объёмную массу с плотностью $m/V=-\partial P_z/\partial z$, что соответствует формуле $(3.8)_1$ так как в данном случае $P_x=P_y=0$ и, следовательно, $\partial P_z/\partial z=\operatorname{div}\mathbf{P}$. Следует отметить, что если векторные линии l_P поля $\mathbf{P}$ – параллельные прямые, то согласно $(1.91)_1$ формула $(3.8)_1$ принимает вид

$$\delta_{\text{свз}}=-\partial P/\partial l_P. \qquad (3.10')$$

Приведенные примеры подтверждают, что в поляризуемой среде появляются связанные массы: объёмные там, где поляризация меняется непрерывно, и поверхностные там, где она меняется скачкообразно. В рассмотренных случаях связанные массы положительны, если абсолютная величина вектора **P** уменьшается по его направлению, и отрицательны, если она увеличивается по направлению вектора **P**. Это соответствует более общему правилу знаков, приведенному выше.

Сумма масс, появляющихся внутри поляризованного тела и на его поверхности, равна нулю, так как при поляризации происходит только образование молекулярных диполей (или их повороты), но не разделение разноимённых, масс. Попытки разделить поляризованное тело так, чтобы часть его содержала получившийся в результате поляризации избыток массы (заряда) одного знака, оказываются всегда безуспешными. Отсюда название «связанные» массы.

IV. Зависимые и независимые массы

Согласно $(3.3)_1$

$$\operatorname{div}\mathbf{P}=\operatorname{div}\mathbf{P}^{\text{вр}}+\operatorname{div}\mathbf{P}^0, \qquad \operatorname{Div}\mathbf{P}=\operatorname{Div}\mathbf{P}^{\text{вр}}+\operatorname{Div}\mathbf{P}^0. \qquad (3.11)$$

Поэтому в соответствии с (3.8) имеем связанные массы $m_{\text{свз}}$ двух видов: *постоянные* m^0 и *временные* $m_{\text{вр}}$:

$$m_{\text{свз}}=m^0+m_{\text{вр}}, \qquad \delta_{\text{свз}}=\delta^0+\delta_{\text{вр}}, \qquad \sigma_{\text{свз}}=\sigma^0+\sigma_{\text{вр}}, \qquad (3.12)$$

где

$$\delta^0=-\operatorname{div}\mathbf{P}^0, \quad \delta_{\text{вр}}=-\operatorname{div}\mathbf{P}^{\text{вр}}, \quad \sigma^0=-\operatorname{Div}\mathbf{P}^0, \quad \sigma_{\text{вр}}=-\operatorname{Div}\mathbf{P}^{\text{вр}}. \qquad (3.12')$$

Массы m^0 определяются независимо от поля **f** произвольно задаваемым полем $\mathbf{P}^0$ и их можно также считать произвольно задаваемыми, *независимыми*. Массы $m_{\text{вр}}$ зависят от $\mathbf{P}^{\text{вр}}$ и, следовательно, от **f**; это *зависимые* массы, которые не могут быть заданы произвольно (при искомом поле **f**).

В отличие от связанных масс будем называть массы (заряды), не обусловленные явлением поляризации и отделимые от масс противоположного знака, *свободными* и обозначим их $m_{\text{свб}}$, а их плотности – $\delta_{\text{свб}}$ и $\sigma_{\text{свб}}$.

Свободными массами могут быть только электрические заряды (массы

$m_{эл}=e$); свободных магнитных масс нет. Магнитостатическое поле создают только связанные массы. Свободные магнитные массы мы должны считать несуществующими даже в том фиктивном смысле, который имеет понятие магнитной массы вообще. Это вполне понятно, принимая во внимание, что фактическими возбудителями магнитостатического поля являются молекулярные замкнутые токи, эквивалентные парам разноимённых магнитных масс (см. главу пятую). Независимыми источниками магнитного поля служат постоянные связанные магнитные массы m^0, носителями которых согласно $(3.12')_{1,3}$ являются *п о с т о я н н ы е   м а г н и т ы*. Поле таких магнитов мы имели в виду во второй главе, говоря о магнитном поле в вакууме. При этом мы отвлекались от влияния тел магнитов как магнетиков, от их намагничения в магнитном поле (своём и других магнитов).

§ 2. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ СМЕЩЕНИЕ И МАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

В общем случае имеем поле, создаваемое свободными и связанными массами, для которого справедливы все формулы, полученные для поля **f** и его потенциала U в вакууме, с той лишь оговоркой, что в них массы m и их плотности следует заменить полными массами и их плотностями, т. е. вместо величин, m, δ, σ следует подставить

$$m_{плн}=m_{свб}+m_{свз},\qquad \delta_{плн}=\delta_{свб}+\delta_{свз},\qquad \sigma_{плн}=\sigma_{свб}+\sigma_{свз}. \tag{3.13}$$

В частности, для поля $\nu\cdot\mathbf{f}=\mathbf{F}(a)/m_a$, создаваемого объёмными и поверхностными массами, мы получаем, согласно (2.32), (2.89) уравнения

$$\operatorname{div}(\nu\cdot\mathbf{f})=4\pi\cdot\nu\cdot\delta_{плн},\qquad \operatorname{Div}(\nu\cdot\mathbf{f})=4\pi\cdot\nu\cdot\sigma_{плн} \tag{3.13'}$$

или согласно (2.114), (2.9)

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=\delta_{плн}/\varepsilon_0,\quad \operatorname{Div}\mathbf{E}=\sigma_{плн}/\varepsilon_0 \qquad \vee \qquad \operatorname{div}\mathbf{H}=\delta_{плн},\quad \operatorname{Div}\mathbf{H}=\sigma_{плн}. \tag{3.14}$$

Аналогично получаем из (2.30)

$$\oint\limits_{S[V]}(\mathbf{E}\,d\mathbf{S})=\frac{1}{\varepsilon_0}\cdot e_{V плн} \qquad \vee \qquad \oint\limits_{S[V]}(\mathbf{H}\,d\mathbf{S})=m_{V плн}. \tag{3.13''}$$

I. Исключение зависимых масс

В общем случае практически нельзя воспользоваться выражениями для поля **f** и потенциала U с подстановкой полных масс, так как для этого надо было бы знать все связанные массы, включая временные связанные массы, зависимые от искомого поля и поэтому нам неизвестные. Постараемся выйти из этого затруднения. Подставляя $(3.8)_1$ и $(3.13)_2$ в $(3.13')_1$, получаем $\operatorname{div}(\nu\cdot\mathbf{f})=4\pi\cdot\nu\cdot\delta_{свб}+4\pi\cdot\nu\cdot\delta_{свз}=4\pi\cdot\nu\cdot\delta_{свб}-4\pi\cdot\nu\cdot\operatorname{div}\mathbf{P}$ откуда

$$\operatorname{div}[\nu\cdot(\mathbf{f}+4\pi\cdot\mathbf{P})]=4\pi\cdot\nu\cdot\delta_{свб} \tag{3.14'}$$

или согласно обозначениям (3.2)

$$\operatorname{div}(\varepsilon_0\cdot\mathbf{E}+\mathbf{P})=\delta_{свб} \qquad \vee \qquad \operatorname{div}[\mu_0\cdot(\mathbf{H}+\mathbf{J})]=0. \tag{3.14''}$$

Аналогичные выражения имеем для поверхностной дивергенции. Вводя обозначения

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\cdot\mathbf{E}+\mathbf{P} \quad \vee \quad \mathbf{B}=\mu_0\cdot(\mathbf{H}+\mathbf{J}), \tag{3.15}$$

получаем

$$\operatorname{div}\mathbf{D}=\delta_{\text{свб}},\quad \operatorname{Div}\mathbf{D}=\sigma_{\text{свб}} \quad \vee \quad \operatorname{div}\mathbf{B}=0,\quad \operatorname{Div}\mathbf{B}=0. \tag{3.16}$$

Итак, для избавления от зависимых связанных источников в уравнениях поля мы от поля **E** $\vee$ **H** и уравнений (3.14) перешли к полю **D** $\vee$ **B** и его уравнениям (3.16).

Вектор **B** называют *магнитной индукцией*, а вектор **D** – *электрическим смещением*, или *электрической индукцией*.

Согласно равенствам $(3.16)_{3,\,4}$ поле **B** вовсе лишено источников. Но, подставляя в $(3.15)_2$ в соответствии с (3.2) и $(3.3)_1$ $\mathbf{J}=\mathbf{J}^{\text{вр}}+\mathbf{J}^0$, получаем

$$\mathbf{B}=\mu_0\cdot(\mathbf{H}+\mathbf{J}^{\text{вр}})+\mu_0\cdot\mathbf{J}^0 \tag{3.17}$$

и, следовательно, согласно $(3.12')_{1,\,3}$ и $(3.16)_{3,\,4}$

$$\operatorname{div}(\mathbf{H}+\mathbf{J}^{\text{вр}})=\delta^0,\qquad \operatorname{Div}(\mathbf{H}+\mathbf{J}^{\text{вр}})=\sigma^0. \tag{3.17'}$$

В отсутствие временной намагниченности, когда магнитное поле создают одни только постоянные магниты (без учёта влияния их тел как магнетиков), имеем

$$\mathbf{B}=\mu_0\cdot(\mathbf{H}+\mathbf{J}^0),\quad \operatorname{div}\mathbf{H}=\delta^0,\quad \operatorname{Div}\mathbf{H}=\sigma^0 \quad (\mathbf{J}^{\text{вр}}=0) \tag{3.17''}$$

в соответствии со сказанным в конце предыдущего параграфа. Согласно $(3.17'')_{2,\,3}$ в уравнениях (2.116') δ и σ следует понимать в смысле δ^0 и σ^0, а в (2.13) можно подставить $\mu_0\cdot\mathbf{H}=\mathbf{B}-\mu_0\cdot\mathbf{J}^0$ (см. раздел III, § 2 главы второй).

II. Восприимчивость и проницаемость среды

Векторы **D** и **B**, согласно изложенному выше, зависят от среды. Выразим эту зависимость, причём условимся считать для поляризации диэлектриков $\mathbf{P}^0_{\text{эл}}=0$, $\mathbf{P}_{\text{эл}}=\mathbf{P}^{\text{вр}}_{\text{эл}}$, т. е. исключим впредь из рассмотрения тела с постоянной электрической поляризацией.

Согласно (2.114) имеем из (3.3), (3.15)

$$\mathbf{P}=4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\alpha_E\cdot\mathbf{E} \quad \vee \quad \mathbf{J}=4\pi\cdot\alpha_H\cdot\mathbf{H}, \tag{3.18}$$

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\cdot(1+4\pi\cdot\alpha_E)\cdot\mathbf{E} \quad \vee \quad \mathbf{B}=\mu_0\cdot[(1+4\pi\cdot\alpha_H)\cdot\mathbf{H}+\mathbf{J}^0], \tag{3.19}$$

или, полагая

$$4\pi\cdot\alpha_E=\chi \quad \vee \quad 4\pi\cdot\alpha_H=\text{æ}, \tag{3.15'}$$

$$\mathbf{P}=\varepsilon_0\cdot\chi\cdot\mathbf{E} \quad \vee \quad \mathbf{J}=\text{æ}\cdot\mathbf{H}+\mathbf{J}^0, \tag{3.18'}$$

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\cdot(1+\chi)\cdot\mathbf{E} \quad \vee \quad \mathbf{B}=\mu_0\cdot[(1+\text{æ})\cdot\mathbf{H}+\mathbf{J}^0] \tag{3.19'}$$

или же

$$\mathbf{P}=\varepsilon_0\cdot(\varepsilon-1)\cdot\mathbf{E} \quad \vee \quad \mathbf{J}=(\mu-1)\cdot\mathbf{H}+\mathbf{J}^0, \tag{3.18''}$$

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\cdot\varepsilon\cdot\mathbf{E} \quad \vee \quad \mathbf{B}=\mu_0\cdot[\mu\cdot\mathbf{H}+\mathbf{J}^0], \tag{3.19''}$$

где

$$\varepsilon=1+\chi \quad \vee \quad \mu=1+\text{æ}. \tag{3.20}$$

Соотношения (3.19'') называют уравнениями связи (или материальными уравнениями; в них входят параметры "материи" - среды: ε, μ).

Согласно (3.8) и (3.18'') в общем случае дивергенция и ротор вектора **P** $\vee$ **J** не равны, нулю, т. е. поле **P** $\vee$ **J** не является ни ламелларным (потенциальным), ни соленоидальным. Согласно $(2.116)_1$, $(2.116')_1$ имеем из (3.18")

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{P}=-\varepsilon_0\cdot[\mathbf{E}\ \nabla\varepsilon]\quad \mathsf{V}\quad \mathrm{rot}\,\mathbf{J}=\mathrm{rot}\,\mathbf{J}^0-[\mathbf{H}\ \nabla\mu]. \qquad (3.18''')$$

Множители χ **V** æ и ε **V** μ – параметры среды, характеризующие её как диэлектрик или магнетик. Параметр χ **V** æ – *восприимчивость среды*: диэлектрическая, магнитная. Этим параметром определяют способность среды воспринимать поляризующее действие поля **E** **V** **H**. Параметр ε **V** μ – *проницаемость среды*: диэлектрическая, магнитная. Произведение

$$\varepsilon_0\cdot\varepsilon=\varepsilon_a \qquad \mathsf{V} \qquad \mu_0\cdot\mu=\mu_a \qquad (3.15'')$$

называют *абсолютной проницаемостью среды*: диэлектрической, магнитной. Парамер ε **V** μ определяет способность, среды преобразовать поле **E** **V** **H** в поле **D** **V** **B**.

В вакууме

$$\chi=0,\ \varepsilon=1,\ \mathbf{D}=\varepsilon_0\cdot\mathbf{E};\qquad æ=0,\ \mu=1,\ \mathbf{J}^0=0,\ \mathbf{B}=\mu_0\cdot\mathbf{H}. \qquad (3.20')$$

В конце § 1 было сказано о том, что до этого, говоря об источниках магнитостатического поля в вакууме, мы имели в виду постоянные магниты, отвлекаясь от влияния тел магнитов как магнетиков, от их намагничения в магнитном поле (своём и других магнитов). В этом случае вместо последних двух выражений в (3.20') следовало бы подставить

$$\mathbf{H}=(1/\mu_0)\cdot\mathbf{B}-\mathbf{J}^0. \qquad (3.20'')$$

Подставляя (3.19") в (3.16), получаем

$$\mathrm{div}\,(\varepsilon\cdot\mathbf{E})=\delta_{\text{свб}}/\varepsilon_0,\ \ \mathrm{Div}\,(\varepsilon\cdot\mathbf{E})=\sigma_{\text{свб}}/\varepsilon_0\ \ \mathsf{V}\ \ \mathrm{div}\,(\mu\cdot\mathbf{H})=\delta^0,\ \ \mathrm{Div}\,(\mu\cdot\mathbf{H})=\sigma^0. \qquad (3.21)$$

Принимая во внимание соотношения

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{div}\,(\varepsilon\cdot\mathbf{E})=\varepsilon\cdot\mathrm{div}\,\mathbf{E}+(\mathbf{E}\ \mathrm{grad}\,\varepsilon),\quad \mathrm{Div}\,(\varepsilon\cdot\mathbf{E})=\varepsilon_2\cdot E_n^{(2)}-\varepsilon_1\cdot E_n^{(1)}=\\ &\quad=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}\left(E_n^{(2)}-E_n^{(1)}\right)+\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{2}\left(E_n^{(1)}+E_n^{(2)}\right)=\\ &\quad\quad=\varepsilon_{\text{ср}}\cdot\mathrm{Div}\,\mathbf{E}+(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\cdot E_n^{\text{ср}} \end{aligned}\right\} \qquad (3.22)$$

и обозначение (1.53"), получаем из (3.21)

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E}+\frac{(\mathbf{E}\ \mathrm{grad}\,\varepsilon)}{\varepsilon}=\frac{\delta_{\text{свб}}}{\varepsilon_a}\qquad \mathsf{V}\qquad \mathrm{div}\,\mathbf{H}+\frac{(\mathbf{H}\ \mathrm{grad}\,\mu)}{\mu}=\frac{\delta^0}{\mu}, \qquad (3.21')$$

$$\mathrm{Div}\,\mathbf{E}+\frac{(\mathbf{E}^{\text{ср}}\ \mathrm{Grad}\,\varepsilon)}{\varepsilon_{\text{ср}}}=\frac{\sigma_{\text{свб}}}{\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{\text{ср}}}\quad \mathsf{V}\quad \mathrm{Div}\,\mathbf{H}+\frac{(\mathbf{H}^{\text{ср}}\ \mathrm{Grad}\,\mu)}{\mu_{\text{ср}}}=\frac{\sigma^0}{\mu_{\text{ср}}}, \qquad (3.21'')$$

где

$$(\mathbf{E}^{\text{ср}}\ \mathrm{Grad}\,\varepsilon)=(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\cdot E_n^{\text{ср}}\quad \mathsf{V}\quad (\mathbf{H}^{\text{ср}}\ \mathrm{Grad}\,\mu)=(\mu_2-\mu_1)\cdot H_n^{\text{ср}}. \qquad (3.22')$$

III. Замечания

1. Векторы **D** и **B** были введены выше как величины, удобные для освобождения второго уравнения от связанных масс, полностью или частично нам неизвестных до расчёта поля. В этой вспомогательной роли вектор **B** оказался магнитным аналогом вектора **D**. С другой стороны, вектор **B** аналогичен вектору **E** в том смысле, что он, а не вектор **H** является силовым вектором, действующим на токи (см. § 1 главы пятой).

При $\mathbf{J}^0$=0 имеем в вакууме $\mu_0 \cdot \mathbf{H}=\mathbf{B}$. Формулы $(2.118)_2$, $(2.119)_1$ и $(2.119)_2$ в этом случае принимают вид

$$\mathbf{F}_{qa}=m_a \cdot \mathbf{B}(a), \quad \mathbf{M}_{вр}=[\mathbf{p}\ \mathbf{B}], \quad \mathbf{M}_{вр}=[\mathbf{M}\ \mathbf{B}]=\eta \cdot [\mathbf{S}^{\partial}\ \mathbf{B}]. \qquad (3.22'')$$

2. В соответствии с принятым условием здесь и далее речь идёт об изотропной среде; предполагается, что в пространстве присутствуют только такие диэлектрики или магнетики, в которых проницаемость не зависит от направления – изотропные диэлектрики, изотропные магнетики. Однако некоторые из полученных формул справедливы также для анизотропной среды. Таковы, например, формулы (3.15), (3.16). Для характеристики анизотропной поляризующейся среды и для преобразования в ней полей **E** и **H** в поля **D** и **B** (при $\mathbf{J}^0$=0) вместо скалярных множителей ε и μ служат тензоры проницаемости ε и μ. В § 1 главы четвёртой будет сказано несколько подробнее об аналогичном тензоре удельной электропроводности.

3. В общем случае в ферромагнетике, даже изотропном, соотношение между **H** и **B** может быть сложнее, чем по $(3.19'')_2$. Но все полученные выше формулы, касающиеся соотношения между намагниченностью и полями **H** и **B**, соответствуют принятому в § 1 условию, что в рассмотрение включаются только идеализированные ферромагнетики, в которых зависимость намагниченности **J** от намагничивающего поля линейная.

4. Исключив из рассмотрения постоянную электрическую поляризацию, мы объединяем термином «независимые» (первичные) массы только свободные заряды $e_{свб}$ и постоянные магнитные массы m^0. Остальные массы $e_{свз}$ и $m_{вр}$ – зависимые (вторичные). В присутствии проводников появляются свободные заряды, независимость которых является неполной (см. § 5).

5. Если бы при выводе выражений (3.6), (3.6') для $U^{п}$ мы допустили существование в области V не только особых поверхностей поля вектора **P**, но также особых линий и точек этого поля, то пришли бы к необходимости дополнить эти выражения членами, соответствующими связанным точечным массам $m_{q\,свз}=m_{q\,вр}+m_q^{\ 0}$ и линейным массам с плотностью $\lambda_{свз}=\lambda_{вр}+\lambda^0$, отличаемым от свободных точечных масс $m_{q\,свб}$ и свободных линейных масс с плотностью $\lambda_{свб}$. Но особые точки и линии поля $\alpha \cdot \mathbf{f}$ совпадают с особыми точками и линиями поля **f**, поэтому зависимые точечные и линейные массы обычно совмещаются с такими же независимыми массами, между тем как зависимые объёмные и поверхностные массы часто имеются и там, где таких независимых масс нет (см. раздел III, § 3). В магнитном поле особыми точками и линиями являются точечные и линейные полюса постоянных магнитов (концы тонких стержней и края тонких листов, намагниченных продольно). Точечные полюса с массами $m_q^{\ 0}$, линейные полюса с плотностью λ^0 и полюсные поверхности с плотностью σ^0 подразумевались в предыдущей главе, когда шла речь о магнитных величинах m_q, λ и σ.

6. Поверхностью разрыва потенциала U в магнитном поле является двойной магнитный слой. Его можно представить как результат мысленного сжатия тонкого слоя магнетика, намагниченного по нормали к его поверхности, при условии, что с уменьшением; толщины h слоя значение $|\sigma|=|J_n|$ на каждой стороне слоя увеличивается, а произведение $|\sigma|\cdot h$ остаётся неизменным. В случае постоянного намагничения, т. е. когда $\mathbf{J}=\mathbf{J}^0$ и $\sigma=\sigma^0=J_n{}^0$, имеем предельно короткий магнит, полюса которого представляют собой две почти совпадающие полюсные поверхности. Такой магнит называют магнитным листком. К магнитному листку применимы формулы, полученные в § 5 главы второй для двойного слоя.

7. Однородный магнит, т. е. магнит, в котором поле $\mathbf{J}^0$ однородно, можно представить как совокупность магнитных листков с одинаковой плотностью η дипольных моментов. Для этого надо мысленно разделить его плоскостями, нормальными к вектору $\mathbf{J}^0$, на тонкие слои одинаковой толщины и заменить каждый из них магнитным листком. Однородный цилиндрический (имеющий форму прямого цилиндра) магнит с высотой h и поперечным сечением S, намагниченный по направлению образующей, можно рассматривать как столб, составленный из $k\cdot h$ одинаковых дисков с толщиной $\Delta h=1/k$, намагниченных по нормалям к их поверхностям. Магнитные моменты этого магнита и отдельно взятого диска определяют формулы

$$\mathbf{M}=\mathbf{J}^0\cdot V=\mathbf{J}^0\cdot h\cdot S, \qquad \Delta\mathbf{M}=\mathbf{J}^0\cdot S\cdot\Delta h=\mathbf{J}^0\cdot S/k=\mathbf{M}/(k\cdot h). \tag{3.23}$$

На основаниях цилиндра и на сторонах каждого диска имеем поверхностные массы с плотностью $\sigma^0=J_n{}^0$. Каждый диск можно заменить магнитным листком с плотностью дипольных моментов

$$\eta=|\sigma^0|\cdot\Delta h=J^0/k=\Delta M/S=M/(k\cdot h\cdot S), \tag{3.23'}$$

а весь магнит – совокупностью $k\cdot h$ листков, соответствующих $k\cdot h$ дискам, из которых он состоит.

8. Для иллюстрации влияния поляризующегося тела на поле $\mathbf{f}$ можно воспользоваться случаем тела (в котором $\mathbf{P}^0=0$), внесённого в однородное первичное поле $\mathbf{f}^{\text{прв}}$ и однородно поляризованного по направлению этого поля. Такой случай имеем, когда тело однородно и имеет форму эллипсоида, причём одна из главных осей эллипсоида параллельна полю $\mathbf{f}^{\text{прв}}$. Согласно (3.8') на поверхности тела возникают массы с плотностью $\sigma_{\text{свз}}$, положительные (m^+) на передней (считая по направлению поля $\mathbf{f}^{\text{прв}}$) стороне тела и отрицательные (m^-) на его тыльной стороне. Несколько более общий случай, когда вне тела среда также поляризующаяся, для электрического поля иллюстрирует рис. 3.6. В этом случае согласно $(3.8)_2$ плотность $\sigma_{\text{свз}}=P_n{}^{(1)}-P_n{}^{(2)}$, где нормаль n направлена внутрь области Θ.

Очевидно, что поле $\mathbf{f}^{\text{втр}}$, создаваемое массами m^+ и m^- образует с первичным полем впереди и сзади тела острые углы, а внутри тела и по бокам его – тупые углы. В результате поляризации тела происходит усиление поля впереди и сзади тела и ослабление поля внутри него и по его бокам.

Совокупность масс, возникающих на поверхности тела, является нейтральной: $m^++m^-=0$. Поэтому на расстояниях от тела, достаточно больших по сравнению с его размерами, поле этих масс совпадает с полем диполя, момент которого определяет формула (3.2')$_2$.

9. Как было отмечено выше, источниками поля **D** являются свободные заряды, а поля μ·**H** – постоянные магнитные массы. Векторные линии l_B поля **B** (а также линии l_D поля **D**) называют линиями индукции. Линии l_D поля **D** начинаются и кончаются на свободных зарядах, а линии $l_{\mu H}$ поля μ·**H** – на постоянных магнитных массах. Поле **B** не имеет источников, линии l_B магнитной индукций нигде не обрываются; они замкнутые (или продолжаются до бесконечности). Линии поля l_E начинаются и кончаются на полных (свободных и связанных) зарядах, а линии l_H поля **H** – на связанных

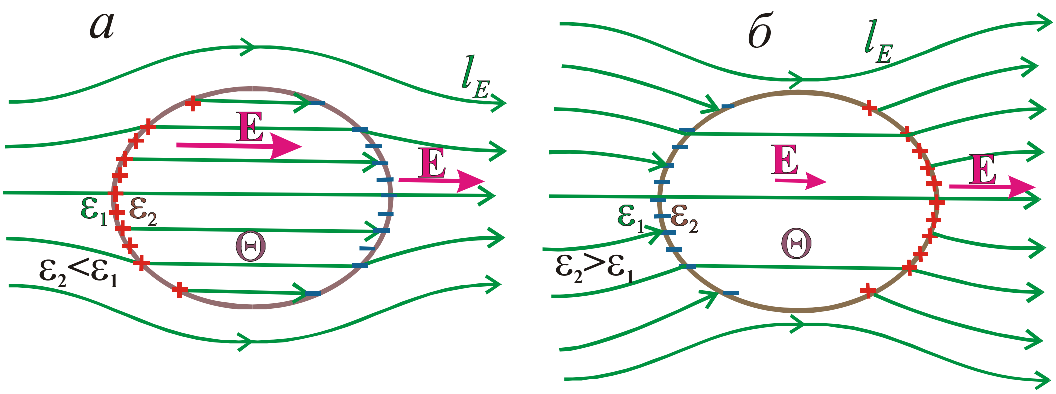

Рис. 3.6.

Инородное (само по себе однородное) включение (тело) в форме эллипсоида в однородном электростатическом поле.

Векторные линии l_D совпадают с векторными линиями l_E, не прерывающимися у поверхности включения. Значения проницаемости ε внутри включения меньше (*а*) или больше (*б*), чем во вмещающей среде

(постоянных и временных) магнитных массах. Линии индукции l_D **V** l_B полей **D V B** пронизывают тело повышенной проницаемости с повышенной густотой.

10. Поле, фактически создаваемое всеми массами, зависимыми и независимыми, будем называть полем независимых масс в среде, имея в виду, что этими массами при заданной проницаемости среды полностью определяется поле (см. § 6) и, следовательно, все его источники, в том числе зависимые массы. В таком смысле следует, например, понимать «поле, создаваемое свободным зарядом $e_{\text{свб}}$ в диэлектрике». Непосредственно этот заряд создаёт в присутствии диэлектрика такое же поле, как в его отсутствии, но заданием этого заряда и диэлектрика определяются также возникающие связанные заряды и создаваемое ими вторичное поле.

§ 3. ПОЛЕ В ПРИСУТСТВИИ ПОЛЯРИЗУЮЩЕЙСЯ СРЕДЫ

Источники поля ε·**E V** μ·**H** совпадают с независимой частью источников поля **E V H**. На первый взгляд может показаться, что, зная эти произвольно задаваемые источники $e_{\text{свб}}$ **V** $m^0_{\text{магн}}$, можно рассчитать поле ε·**E V** μ·**H** по формулам, справедливым для вакуума, и делением на ε **V** μ определить поле **E V H**. На самом же деле поле независимых масс

$e_{\text{свб}}$ **V** $m^0_{\text{магн}}$ является только частью поля $\varepsilon \cdot \mathbf{E}$ **V** $\mu \cdot \mathbf{H}$.

Следует учесть, что $\varepsilon \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} + \mathbf{P}/\varepsilon_0$ **V** $\mu \cdot \mathbf{H} = \mathbf{H} + \mathbf{J}$ [ср. (3.18'), (3.18''')].

Кроме этой (дивергентной, потенциальной) части квазипотенциальное поле $\varepsilon \cdot \mathbf{E}$ **V** $\mu \cdot \mathbf{H}$ содержит ещё вихревую часть.

Поле $\varepsilon \cdot \mathbf{E}$ **V** $\mu \cdot \mathbf{H}$ удовлетворяет условию (1.85):

$$((\varepsilon \cdot \mathbf{E})\,\mathrm{rot}\,(\varepsilon \cdot \mathbf{E})) = -\varepsilon \cdot (\mathbf{E}\,[\mathbf{E}\,\nabla\varepsilon]) = 0 \quad \mathbf{V} \quad ((\mu \cdot \mathbf{H})\,\mathrm{rot}\,(\mu \cdot \mathbf{H})) = -\mu \cdot (\mathbf{H}\,[\mathbf{H}\,\nabla\mu]) = 0.$$

Действительно, принимая во внимание $(2.116)_1$ и $(2.116')_1$, имеем

$$\mathrm{rot}\,(\varepsilon \cdot \mathbf{E}) = -[\mathbf{E}\,\nabla\varepsilon] \quad \mathbf{V} \quad \mathrm{rot}\,(\mu \cdot \mathbf{H}) = -[\mathbf{H}\,\nabla\mu]. \qquad (3.22''')$$

Следовательно, ротор вектора $\varepsilon \cdot \mathbf{E}$ **V** $\mu \cdot \mathbf{H}$ обращается в нуль только там, где проницаемость среды не меняется по направлениям, нормальным к полю. В поле $\varepsilon \cdot \mathbf{E}$ **V** $\mu \cdot \mathbf{H}$ имеются не только обрывающиеся, но также необрывающиеся векторные линии, а в поле **B** – только необрывающиеся векторные линии (линии индукции l_B).

I. Система уравнений поля

Во второй главе расчёт поля сводится к нахождению решения системы уравнений (2.34), которая для полей **E** **V** **H** принимает вид $(2.116)_{1,2}$ или $(2.116')_{1,2}$. При этом благодаря простоте первого уравнения (обращение в нуль ротора) система уравнений для вектора **E** **V** **H** сводится к уравнению Пуассона для потенциала U_E **V** U_H. Теперь мы имеем поля $\varepsilon \cdot \mathbf{E}$ и $\mu \cdot \mathbf{H}$, первые уравнения которых согласно (3.22''') уже не столь просты и поля **E** и **H**, вторые уравнения которых нам, согласно изложенному в § 2, неудобны. Поэтому системы $(2.116)_{1,2}$, $(2.116')_{1,2}$ заменим системами

$$\text{I. } \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = 0, \qquad \text{II. } \mathrm{div}\,\mathbf{D} = \delta_{\text{свб}}; \qquad (3.24)$$

$$\text{I. } \mathrm{rot}\,\mathbf{H} = 0, \qquad \text{II. } \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0. \qquad (3.25)$$

В каждой из этих систем первое и второе уравнения определяют разные поля (**E** и **D** **V** **H** и **B**). Но эти поля взаимно связаны соотношением (3.19''), благодаря чему уравнения $(3.24)_{\text{II}}$, $(3:25)_{\text{II}}$ можно представить в виде уравнений $(3.21')_{1,2}$ для **E** и **H**.

Уравнениям $(3.24)_{\text{I}}$ и $(3.25)_{\text{I}}$, очевидно, соответствуют интегральные и поверхностные формы

$$\oint_l (\mathbf{E}\,\mathbf{dl}) = 0, \quad \mathrm{Rot}\,\mathbf{E} = 0 \qquad \mathbf{V} \qquad \oint_l (\mathbf{H}\,\mathbf{dl}) = 0, \quad \mathrm{Rot}\,\mathbf{H} = 0, \qquad (3.26)$$

а уравнениям $(3.24)_{\text{II}}$, $(3:25)_{\text{II}}$ – интегральные формы

$$\oint_{S[V]} (\mathbf{D}\,\mathbf{dS}) = e_{V\text{свб}} \qquad \mathbf{V} \qquad \oint_{S[V]} (\mathbf{B}\,\mathbf{dS}) = 0, \quad \oint_{S[V]} \mu \cdot (\mathbf{H}\,\mathbf{dS}) = m_V^0 \qquad (3.27)$$

и поверхностные формы $(3.16)_{2,\,4}$, (3.21'').

Поток вектора **D** называют *потоком смещения* (*потоком электрической индукции*), а поток вектора **B** – *магнитным потоком*, или *потоком магнитной индукции*. Согласно (3.27) поток магнитной индукции через замкнутую поверхность равен нулю.

II. Поле у особой поверхности

Согласно (2.87), (2.89), (2.114) поверхностные формы уравнений поля можно представить в следующем виде:

$$E_t^{(2)}-E_t^{(1)}=-\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial t}\eta_{12}^E \quad \vee \quad H_t^{(2)}-H_t^{(1)}=-\frac{\partial}{\partial t}\eta_{12}^H, \tag{3.28}$$

$$D_n^{(2)}-D_n^{(1)}=\sigma_{\text{свб}} \quad \vee \quad B_n^{(2)}-B_n^{(1)}=0, \tag{3.29}$$

$$\varepsilon_2\cdot E_n^{(2)}-\varepsilon_1\cdot E_n^{(1)}=\sigma_{\text{свб}}/\varepsilon_0 \quad \vee \quad \mu_2\cdot H_n^{(2)}-\mu_1\cdot H_n^{(1)}=\sigma^0. \tag{3.29'}$$

Равенства (3.28) – (3.29') определяют поведение компонент векторов напряжённости поля и индукции у какой-либо поверхности S, которая в общем случае является поверхностью раздела и носителем простого и двойного слоёв, особой поверхностью. В равенствах (3.28) η_{12} – поверхностная плотность дипольных моментов электрического или магнитного двойного слоя на поверхности S, определяемая формулой (2.120').

Таким образом, на поверхности S: 1) нормальная компонента вектора магнитной индукции непрерывна; 2) нормальная компонента вектора $\mathbf{D}=\varepsilon_a\cdot\mathbf{E}$ терпит разрыв, равный поверхностной плотности свободных зарядов; 3) нормальная компонента вектора $\mu\cdot\mathbf{H}$ терпит разрыв, равный поверхностной плотности постоянных магнитных масс; 4) компонента вектора $\varepsilon_0\cdot\mathbf{E}$ $\vee$ $\mathbf{H}$ по тангенциальному направлению t терпит разрыв, равный $-\partial\eta_{12}/\partial t$ и исчезающий, когда двойной слой однороден по направлению t.

III. Уравнение потенциала

Подставляя решения $(2.115)_{1,3}$ первых уравнений систем (3.24) и (3.25) в соотношения (3.19''), получаем

$$\mathbf{D}=-\varepsilon_a\cdot\nabla U_E \quad \vee \quad \mathbf{B}=-\mu_a\cdot\nabla U_H+\mu_0\cdot\mathbf{J}^0. \tag{3.30}$$

Следовательно, из вторых уравнений тех же систем получаем для потенциалов U_E и U_H полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ уравнения

$$(\nabla\,(\varepsilon\cdot\nabla U_E))=-\delta_{\text{свб}}/\varepsilon_0 \quad \vee \quad (\nabla\,(\mu\cdot\nabla U_H))=-\delta^0, \tag{3.31}$$

т. е.

$$\nabla^2 U_E+\frac{(\nabla\varepsilon\,\nabla U_E)}{\varepsilon}=-\frac{\delta_{\text{свб}}}{\varepsilon_a} \quad \vee \quad \nabla^2 U_H+\frac{(\nabla\mu\,\nabla U_H)}{\mu}=-\frac{\delta^0}{\mu}. \tag{3.31'}$$

Из $(2.115)_{2,4}$, (2.82), (3.28), (3.29') имеем равенства

$$U_E^{(2)}-U_E^{(1)}=\frac{1}{\varepsilon_0}\eta_{12}^E \quad \vee \quad U_H^{(2)}-U_H^{(1)}=\eta_{12}^H; \tag{3.32}$$

$$\frac{\partial U_E^{(2)}}{\partial t}-\frac{\partial U_E^{(1)}}{\partial t}=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial\eta_{12}^E}{\partial t} \quad \vee \quad \frac{\partial U_H^{(2)}}{\partial t}-\frac{\partial U_H^{(1)}}{\partial t}=\frac{\partial\eta_{12}^H}{\partial t}; \tag{3.32'}$$

$$\varepsilon_2\cdot\frac{\partial U_E^{(2)}}{\partial n}-\varepsilon_1\cdot\frac{\partial U_E^{(1)}}{\partial n}=-\frac{\sigma_{\text{свб}}}{\varepsilon_0} \quad \vee \quad \mu_2\cdot\frac{\partial U_H^{(2)}}{\partial n}-\mu_1\cdot\frac{\partial U_H^{(1)}}{\partial n}=-\sigma^0, \tag{3.32''}$$

определяющие поведение потенциалов электрического и магнитного полей у поверхности S в общем случае, о котором шла речь выше (в разделе II).

Аналогично можно представить интегральные формы уравнений поля.

Равенства $(3.27)_{1,3}$ принимают вид

$$\oint_{S[V]} \varepsilon \cdot \frac{\partial U_E}{\partial n}\, dS = -\frac{e_{V\text{свб}}}{\varepsilon_0} \quad \mathbf{V} \quad \oint_{S[V]} \mu \cdot \frac{\partial U_H}{\partial n}\, dS = -m_V^0 . \qquad (3.33)$$

IV. Определение зависимых источников поля

Зависимость плотности некоторых (зависимых) источников поля от фактически действующего поля заставила нас исключить их из системы дифференциальных уравнений поля. Но после расчёта поля, например, после получения решения системы уравнений (3.24) **V** (3.25) или эквивалентного ей уравнения (3.31), можно, зная суммарное поле и проницаемость среды, определить зависимые источники поля. Как же выражаются зависимости плотности этих источников от поля и среды? Сравнивая $(3.21')_1$ с $(3.14)_1$, видим, что объёмная плотность полных и связанных источников электростатического поля **E**

$$\delta_{\text{плн}} = \frac{\delta_{\text{свб}}}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \cdot (\mathbf{E}\ \nabla\varepsilon), \quad \delta_{\text{свз}} = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \delta_{\text{свб}} - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \cdot (\mathbf{E}\ \nabla\varepsilon), \qquad (3.33')$$

т. е.

$$\delta_{\text{свз}} = \delta_{\varepsilon\,\text{свб}} + \delta_{\varepsilon E}, \quad \text{где} \quad \delta_{\varepsilon\,\text{свб}} = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \delta_{\text{свб}} \quad \text{и} \quad \delta_{\varepsilon E} = -\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \cdot (\mathbf{E}\ \nabla\varepsilon) \qquad (3.34)$$

– плотности связанных зарядов двух типов: $e_{\varepsilon\,\text{свб}}$ и $e_{\varepsilon E}$. Заряды первого типа $e_{\varepsilon\,\text{свб}}$ существуют в диэлектрике там, где имеются свободные заряды, а заряды второго типа $e_{\varepsilon E}$ – там, где диэлектрическая проницаемость ε меняется по направлению поля **E**. Аналогично при сравнении $(3.21')_2$, $(3.21'')$ с $(3.14)_{2,3,4}$ получаем

$$\sigma_{\text{свз}} = \sigma_{\varepsilon\,\text{свб}} + \sigma_{\varepsilon E}, \quad \sigma_{\varepsilon\,\text{свб}} = \frac{1-\varepsilon_{\text{ср}}}{\varepsilon_{\text{ср}}} \cdot \sigma_{\text{свб}}, \quad \sigma_{\varepsilon E} = \frac{\varepsilon_0 \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_{\text{ср}}} \cdot E_n^{\text{ср}} \qquad (3.34')$$

для плотности связанных поверхностных зарядов и

$$\delta_{\text{вр}} = \delta_\mu^0 + \delta_{\mu H}, \quad \delta_\mu^0 = \frac{1-\mu}{\mu} \cdot \delta^0, \quad \delta_{\mu H} = -\frac{1}{\mu} \cdot (\mathbf{H}\ \nabla\mu), \qquad (3.34'')$$

$$\sigma_{\text{вр}} = \sigma_\mu^0 + \sigma_{\mu H}, \quad \sigma_\mu^0 = \frac{1-\mu_{\text{ср}}}{\mu_{\text{ср}}} \cdot \sigma^0, \quad \sigma_{\mu H} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_{\text{ср}}} \cdot H_n^{\text{ср}} \qquad (3.34''')$$

для вр***е***менных объёмных и поверхностных магнитных масс первого и второго типов – m_μ^0 и $m_{\mu H}$ появляющихся там, где имеются постоянные магнитные массы, и там, где магнитная проницаемость μ меняется по направлению поля **H**. В (3.34'), (3.34''') $E_n^{\text{ср}} = (E_n^{(1)} + E_n^{(2)})/2$, $H_n^{\text{ср}} = (H_n^{(1)} + H_n^{(2)})/2$.

Зависимые объёмные массы второго типа (с плотностью $\delta_{\mu H}$) получаются в местах непрерывного изменения проницаемости. Зависимые поверхностные массы второго типа (с плотностью $\sigma_{\mu H}$) могут существовать там, где проницаемость среды терпит разрыв, т. е. на поверхностях раздела между средами с различной проницаемостью μ.

Согласно (3.34)₂ – (3.34''')₂ плотности зависимых масс первого типа пропорциональны плотности независимых масс m^0, у которых они появляются, и имеют знаки, противоположные знакам этих масс. Каждый элемент независимой объёмной или поверхностной массы образует поле, под действием которого к этому элементу обращаются полюса (диполей среды) обратного ему знака. Точечные и линейные зависимые массы обычно бывают только первого типа; они появляются соответственно у независимых точечных и линейных масс и имеют знаки, обратные знакам этих масс. У точечного заряда $e_{q\,\text{свб}}$, например, появляется связанный точечный заряд первого типа, равный $[(1-\varepsilon)/\varepsilon]\cdot e_{q\,\text{свб}}$. Сумма этих двух зарядов равна $e_{q\,\text{свб}}/\varepsilon$.

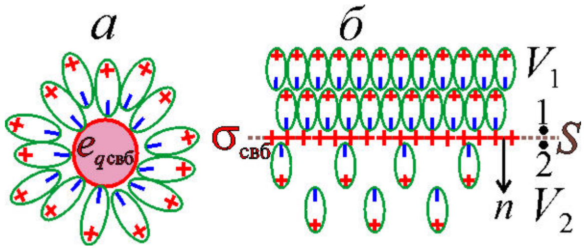

Рис. 3.7.
Заряд $e_{q\text{свб}}$ в диэлектрике (*а*) и поверхностные заряды с плотностью $\sigma_{\varepsilon\text{свб}}$ на границе *S* двух диэлектриков в присутствии на *S* свободного заряда с плотностью $\sigma_{\text{свб}}$ (*б*)

Иллюстрациями к сказанному выше о связанных зарядах первого типа (в окрестности заряда $e_{q\text{свб}}$ и поверхностных зарядах с плотностью $\sigma_{\varepsilon\text{свб}}$) могут служить соответственно рис. 3.7, *а* и рис. 3.7, *б*.

Объёмная зависимая масса второго типа согласно (3.34)₃, (3.34'')₃ положительна, если угол между направлениями поля **E V H** и градиента проницаемости среды тупой, и отрицательна, если этот угол острый. Поверхностная зависимая масса второго типа согласно (3.34')₃, (3.34''')₃ положительна там, где разность значений проницаемости ($\varepsilon_1-\varepsilon_2$ **V** $\mu_1-\mu_2$) и среднее значение нормальной компоненты поля, **E V H** имеют одинаковые знаки.

Из сказанного следует, что массы второго типа положительны, там, где проницаемость уменьшается по направлению поля, и отрицательны там, где по направлению поля проницаемость среды увеличивается.

Прибавляя к плотностям независимых масс плотности зависимых масс первого типа, получаем плотности

$$\delta_{\text{свб}}+\delta_{\varepsilon\,\text{свб}}=\delta_{\text{свб}}/\varepsilon \quad \mathbf{V} \quad \delta^0+\delta^0_\mu=\delta^0/\mu, \qquad (3.35)$$

$$\sigma_{\text{свб}}+\sigma_{\varepsilon\,\text{свб}}=\sigma_{\text{свб}}/\varepsilon_{\text{ср}} \quad \mathbf{V} \quad \sigma^0+\sigma^0_\mu=\sigma^0/\mu_{\text{ср}} \qquad (3.35)$$

масс, существование которых не обусловлено нарушениями однородности среды. В общем случае, могут совместно находиться зависимые массы (объёмные или поверхностные) обоих типов, но они могут встречаться также в отдельности. В области *V*, в которой среда однородна хотя бы только по направлению поля, согласно (3.34)₃ – (3.34''')₃ зависимых масс второго типа нет и, следовательно, полную плотность масс определяют формулы (3.35), по которой эта плотность меньше плотности независимых масс во столько раз, во сколько проницаемость среды больше единицы.

Итак, согласно изложенному

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\left(\delta_{\text{свб}} + \delta_{\varepsilon\,\text{свб}} + \delta_{\varepsilon E}\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{\delta_{\text{свб}}}{\varepsilon} + \delta_{\varepsilon E}\right), \tag{3.36}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = \delta^0 + \delta^0_\mu + \delta_{\mu H} = \frac{\delta^0}{\mu} + \delta_{\mu H}, \tag{3.36'}$$

$$\operatorname{Div}\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\left(\sigma_{\text{свб}} + \sigma_{\varepsilon\,\text{свб}} + \sigma_{\varepsilon E}\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{\sigma_{\text{свб}}}{\varepsilon_{\text{ср}}} + \sigma_{\varepsilon E}\right), \tag{3.36''}$$

$$\operatorname{Div}\mathbf{H} = \sigma^0 + \sigma^0_\mu + \sigma_{\mu H} = \frac{\sigma^0}{\mu_{\text{ср}}} + \sigma_{\mu H}, \tag{3.36'''}$$

где δ и σ (с индексами) определяют формулы (3.34) – (3.34'''), (3.35).

§ 4. УСЛОВИЯ, УПРОЩАЮЩИЕ ВЛИЯНИЕ ПРОНИЦАЕМОСТИ СРЕДЫ

Согласно (3.31) при заданной проницаемости среды ε **V** μ поле полностью определяется независимыми массами. Но зависимость поля от этих масс в присутствии среды обычно сложная. В частности, потенциал $U(a)$ поля независимой массы $e_{q\,\text{свб}}$ **V** m_q^0 зависит не только от L_{qa}, но также от расстояний точек q и a от мест нарушения однородности среды.

Попутно отметим, что из-за этого обстоятельства в присутствии среды соотношение (2.107) несправедливо, так как преобразование (1.126') неприменимо вследствие указанной зависимости $U(a)$ от точек a и q не только через расстояние L_{qa} между ними.

Но влияние среды упрощается при некоторых частных видах функции ε **V** μ.

I. Однородность среды

Рассмотрим случаи, когда среда удовлетворяет одному из следующих трёх условий: 1) $\nabla\varepsilon=0$ **V** $\nabla\mu=0$; 2) $(\mathbf{E}\,\nabla\varepsilon)=0$ **V** $(\mathbf{H}\,\nabla\mu)=0$; 3) $[\mathbf{E}\,\nabla\varepsilon]=0$ **V** $[\mathbf{H}\,\nabla\mu]=0$.

В первом случае среда однородна и согласно (3.21'), (3.21''), (3.31')

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=\delta_{\text{свб}}/\varepsilon_{\text{а}},\quad \operatorname{Div}\mathbf{E}=\sigma_{\text{свб}}/\varepsilon_{\text{а}},\quad \nabla^2 U_E=-\delta_{\text{свб}}/\varepsilon_{\text{а}}, \tag{3.37}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H}=\delta^0/\mu,\quad \operatorname{Div}\mathbf{H}=\sigma^0/\mu,\quad \nabla^2 U_H=-\delta^0/\mu. \tag{3.37'}$$

Под влиянием однородной среды суммарная плотность масс, создающих поле, оказывается равной плотности независимых масс, делённой на проницаемость среды, что в соответствии со сказанным в конце § 3 объясняется отсутствием зависимых масс второго типа ($e_{\varepsilon E}$ **V** $m_{\mu H}$). Сравнивая формулы (3.37), (3.37') с формулами (2,16), (2.16'), полученными во второй главе для поля в вакууме, мы видим, что в данном случае поле определяется как поле, создаваемое в вакууме независимыми массами, делёнными на ε **V** μ. Однако это верно только тогда, когда среда однородна во всём пространстве. Если среда однородна только в области V, то для неё также справедливы формулы (3.37), (3.37') и, следовательно, источниками поля, находящимися в ней, являются независимые массы, делённые на ε **V** μ.

Но поле в области V порождают также массы, находящиеся вне этой области, а в их составе (в неоднородной вне области V среде) могут быть зависимые массы обоих типов. Поэтому однородность среды в отдельной области V недостаточна для того, чтобы определить в ней поле по формулам, справедливым для вакуума с делителем $\varepsilon \vee \mu$. Но если среда однородна всюду, то учёт её влияния сводится к делению заданных (независимых) масс на проницаемость среды.

Во втором случае среда однородна по направлению поля. В этом случае также справедливы формулы (3.37), (3.37'), так как именно это условие обращает в нуль вторые члены левых частей в (3.21'), (3.21''), (3.31'), вследствие чего исчезают зависимые массы второго типа.

В третьем случае среда однородна по поверхностям, нормальным полю. При этом возможны зависимые источники поля $\mathbf{E} \vee \mathbf{H}$ обоих типов, но поле $\varepsilon\cdot\mathbf{E} \vee \mu\cdot\mathbf{H}$ упрощается, его ротор согласно (3.22'') равен нулю. А так как это поле удовлетворяет также уравнению (3.21), то вся система уравнений для него не отличается от системы уравнений поля $\mathbf{E} \vee \mathbf{H}$ в вакууме.

В последних двух случаях среда однородна не по всем направлениям. Тем не менее, иногда расчёт поля в этих случаях упрощается (см. замечания 4, 9, 10 в § 6).

Вернёмся к первому случаю при условии однородности среды во всём пространстве, т. е, к случаю неограниченной однородной среды, которую также называют всюду однородной или безграничной однородной. Приведём примеры перехода от выражений, полученных для поля в вакууме, к полю в неограниченной однородной среде. В соответствии с (2.117) имеем для поля, создаваемого точечной массой,

$$\mathbf{E}(a) = \frac{e_{q\,\text{свб}}}{4\pi\cdot\varepsilon_\text{а}\cdot L_{qa}^3}\mathbf{L}_{qa} \quad\vee\quad \mathbf{H}(a) = \frac{m_q^0}{4\pi\cdot\mu\cdot L_{qa}^3}\mathbf{L}_{qa}, \tag{3.38}$$

$$U_E(a) = \frac{e_{q\,\text{свб}}}{4\pi\cdot\varepsilon_\text{а}\cdot L_{qa}} \quad\vee\quad U_H(a) = \frac{m_q^0}{4\pi\cdot\mu\cdot L_{qa}}, \tag{3.38'}$$

и аналогично для поля, создаваемого объёмной массой,

$$\mathbf{E}(a) = \frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_\text{а}}\int_V \frac{\delta_\text{свб}}{L_{qa}^3}\mathbf{L}_{qa}\,dV \quad\vee\quad \mathbf{H}(a) = \frac{1}{4\pi\cdot\mu}\int_V \frac{\delta^0}{L_{qa}^3}\mathbf{L}_{qa}\,dV, \tag{3.39}$$

$$U_E(a) = \frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_\text{а}}\int_V \frac{\delta_\text{свб}}{L_{qa}}dV \quad\vee\quad U_H(a) = \frac{1}{4\pi\cdot\mu}\int_V \frac{\delta^0}{L_{qa}}dV. \tag{3.39'}$$

Потенциал, определяемый согласно (3.38') зависит от положения точек a и q только через расстояние L_{qa} между ними. Поэтому соотношение (2.107) справедливо для неограниченной однородной среды так же, как для вакуума (см. сноску в начале § 4).

Для поля неограниченной однородной прямолинейной массы в соответствии с (2.50') получаем

$$U_E = \frac{\lambda_\text{свб}}{2\pi\cdot\varepsilon_\text{а}}\cdot\ln\frac{C}{r},\ \mathbf{E} = \frac{\mathbf{1}_r\cdot\lambda_\text{свб}}{2\pi\cdot\varepsilon_\text{а}\cdot r} \vee U_H = \frac{\lambda^0}{2\pi\cdot\mu}\cdot\ln\frac{C}{r},\ \mathbf{H} = \frac{\mathbf{1}_r\cdot\lambda^0}{2\pi\cdot\mu\cdot r}, \tag{3.38''}$$

где r – расстояние от точки наблюдения до прямолинейной массы.

Из сказанного в разделе IV, § 7 главы второй о поведении поля у точечной или линейной массы следует, что формулы (3.38), (3.38'), (3.38'') остаются справедливыми, если однородность среды нарушается на расстояниях от точечной или линейной массы, очень больших сравнительно с расстоянием от неё до точки a, в которой определяется поле. Следовательно, эти формулы справедливы также в случае неоднородной среды для точки a, стремящейся к точечной или линейной массе (при $L_{qa}\to 0$ или при $r\to 0$), если в окрестности этой массы среда однородна.

Закон Кулона для неограниченной однородной среды получаем в соответствии с (2.118):

$$\mathbf{F}_{qa}=\frac{e_{q\,\text{свб}}\cdot e_{a\,\text{свб}}}{4\pi\cdot\varepsilon_{\text{а}}\cdot L_{qa}^{3}}\mathbf{L}_{qa}\quad \vee \quad \mathbf{F}_{qa}=\frac{\mu_0\cdot m_q^0\cdot m_a^0}{4\pi\cdot\mu\cdot L_{qa}^{3}}\mathbf{L}_{qa}. \qquad (3.40)$$

Формулы (3.40) определяют силу взаимодействия между точечными (электрическими $\vee$ магнитными) массами, помещёнными в неограниченную однородную поляризующуюся (или намагничивающуюся) среду. Сравнивая эти формулы с формулами (2.118) для взаимодействия масс в вакууме, мы видим, что заполняющая всё пространство однородная поляризующаяся (намагничивающаяся) среда ослабляет силы взаимодействия находящиеся в ней независимых масс (зарядов, магнитных полюсов); эти силы обратно пропорциональны проницаемости среды.

Для справедливости формул $(3.38)_2$ – $(3.40)_2$ необходима однородность среды во всём пространстве, включая тела магнитов (создающих поля, взаимодействующих). Это строгое условие однородности среды не соблюдается в более сложной задаче о влиянии внешне однородной среды. В этой практически важной задаче $\nabla\mu_e=0$, где μ_e – проницаемость среды вне магнитов, отличающаяся от их проницаемости μ_i. Влияние значения μ_e на поле магнита с проницаемостью μ_i различно при разных формах магнита и зависит от соотношения между его размерами (см. [Тамм, 1976] § 74).

Уподобляя магнит однородному эллипсоиду вращения, однородно намагниченному по направлению оси симметрии, можно сказать, что влияние среды зависит от отношения β длины магнита к его толщине (к диаметру его максимального поперечного сечения), считая длиной магнита его размер по направлению намагниченности. При достаточно большом значении β (длинный и тонкий стержень) поле магнита обратно пропорционально μ_e, а при очень малой его длине (пластинка, намагниченная по нормали) поле магнита практически не зависит от μ_e.

Из сказанного ясно, что формула $(3.38)_2$ справедлива также для случая внешне однородной среды ($\nabla\mu_e=0$) при условии, что $m^0{}_q$ – масса полюса магнита, однородного ($\nabla\mu_i=0$, но $\mu_i\neq\mu_e$), длинного, тонкого и продольно намагниченного. При аналогичных условиях справедлива также формула $(3.40)_2$.

II. Поверхность раздела

Рассмотрим поверхность раздела S, на которой независимых поверхностных масс (простого или двойного слоя) нет и у которой $\mathbf{J}^0=0$ (рис. 3.8). Для такой поверхности имеем вместо формул (3.28) – (3.29'), (3.32) – (3.32') более простые формулы

$$E_t^{(2)} = E_t^{(1)},\ D_n^{(2)} = D_n^{(1)} \quad \vee \quad H_t^{(2)} = H_t^{(1)},\ B_n^{(2)} = B_n^{(1)}, \qquad (3.41)$$

$$U^{(2)}=U^{(1)}, \qquad \partial U^{(2)}/\partial t=\partial U^{(1)}/\partial t. \qquad (3.41')$$

Но $\mathbf{D}=\varepsilon_a\cdot\mathbf{E}$ и (в данном случае) $\mathbf{B}=\mu_a\cdot\mathbf{H}$, поэтому из (3.41) следует, что

$$\frac{D_t^{(2)}}{\varepsilon_2} = \frac{D_t^{(1)}}{\varepsilon_1},\quad \frac{E_n^{(2)}}{\varepsilon_1} = \frac{E_n^{(1)}}{\varepsilon_2} \quad \vee \quad \frac{B_t^{(2)}}{\mu_2} = \frac{B_t^{(1)}}{\mu_1},\quad \frac{H_n^{(2)}}{\mu_1} = \frac{H_n^{(1)}}{\mu_2}, \quad (3.41'')$$

$$\varepsilon_2 \cdot \frac{\partial}{\partial n} U_E^{(2)} = \varepsilon_1 \cdot \frac{\partial}{\partial n} U_E^{(1)} \quad \vee \quad \mu_2 \cdot \frac{\partial}{\partial n} U_H^{(2)} = \mu_1 \cdot \frac{\partial}{\partial n} U_H^{(1)}. \quad (3.41''')$$

Согласно этим формулам на поверхности раздела S:

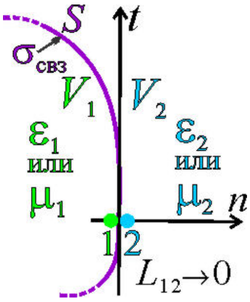

Рис. 3.8. Поверхность раздела (граница) S двух сред, различающихся по проницаемости

1) потенциалы U и тангенциальные компоненты полей **E** и **H**, тангенциальные производные потенциалов этих полей и нормальные компоненты векторов **D** и **B** непрерывны;

2) тангенциальные компоненты векторов **D** и **B** терпят разрывы, меняясь (при прохождении точки наблюдения через поверхность S) пропорционально проницаемости среды;

3) нормальные компоненты полей **E** и **H** и нормальные производные их потенциалов терпят разрывы, меняясь обратно пропорционально проницаемости среды.

Разрывы компонент поля, зависящие согласно (3.41'') от отношения $\varepsilon_1/\varepsilon_2 \vee \mu_1/\mu_2$, не определяются им полностью. Этим отношением определяются только отношения разрывов компонент к их средним значениям у поверхности S. Ниже мы легко в этом убедимся, но предварительно познакомимся с удобным для характеристики поверхности раздела *коэффициентом отражения*

$$\varepsilon_{12} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\cdot\varepsilon_{ср}} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \quad \vee \quad \mu_{12} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\cdot\mu_{ср}} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}, \qquad (3.42)$$

где $\varepsilon_{ср}=(\varepsilon_1+\varepsilon_2)/2$, $\mu_{ср}=(\mu_1+\mu_2)/2$.

Это название "коэффициент отражения" было связано с его применением при расчёте поля (в присутствии плоских поверхностей раздела) по методу зеркальных изображений. Коэффициент $\varepsilon_{12} \vee \mu_{12}$ поверхности S определяет отношение проницаемостей сред, разделяемых ею, например $\varepsilon_{12}=(1-\varepsilon_2/\varepsilon_1)/(1+\varepsilon_2/\varepsilon_1)$. При изменении отношения $\varepsilon_2/\varepsilon_1 \vee \mu_2/\mu_1$ от нуля до бесконечности коэффициент $\varepsilon_{12} \vee \mu_{12}$ меняется от +1 до –1.

Коэффициент $\varepsilon_{12} \vee \mu_{12}$ можно назвать *коэффициентом контрастности* поверхности раздела S (сред, разделяемых ею). Чем больше модуль коэффициента контрастности, тем больше отношение абсолютной величины разрыва проницаемости к среднему из её значений у поверхности раздела (границы).

Теперь вернёмся к разрывам компонент поля. Согласно $(3.41'')_{2,4}$

$$\left(E_n^{(2)} - E_n^{(1)}\right)\cdot\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right) = \left(E_n^{(2)} + E_n^{(1)}\right)\cdot\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right).$$

Следовательно,

$$E_n^{(2)} - E_n^{(1)} = 2\cdot\varepsilon_{12}\cdot E_n^{\text{ср}} \quad \vee \quad H_n^{(2)} - H_n^{(1)} = 2\cdot\mu_{12}\cdot H_n^{\text{ср}}. \qquad (3.43)$$

Аналогично получаем из равенств $(3.41'')_{1,3}$

$$D_t^{(2)} - D_t^{(1)} = -2\cdot\varepsilon_{12}\cdot D_t^{\text{ср}} \quad \vee \quad B_t^{(2)} - B_t^{(1)} = -2\cdot\mu_{12}\cdot B_t^{\text{ср}}, \qquad (3.43')$$

где $D_t^{\text{ср}}=(D_t^{(1)}+D_t^{(2)})/2$, $B_t^{\text{ср}}=(B_t^{(1)}+B_t^{(2)})/2$.

Разрыв компоненты E_n $\vee$ H_n объясняется тем, что под влиянием поля на поверхности S появляется зависимая поверхностная масса второго типа с плотностью $\sigma_{\varepsilon E}$ $\vee$ $\sigma_{\mu H}$, пропорциональной среднему значению этой компоненты. Действительно, согласно (3.36''), (3.36''') на поверхности раздела

$$E_n^{(2)} - E_n^{(1)} = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\sigma_{\varepsilon E} \quad \vee \quad H_n^{(2)} - H_n^{(1)} = \sigma_{\mu H}. \qquad (3.44)$$

Сравнивая (3.44) с (3.43), мы видим, что на поверхности раздела плотность зависимых масс определяют формулы

$$\sigma_{\varepsilon E} = 2\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{12}\cdot E_n^{\text{ср}} \quad \vee \quad \sigma_{\mu H} = 2\cdot\mu_{12}\cdot H_n^{\text{ср}}, \qquad (3.45)$$

причём

$$\sigma_{\varepsilon E}=\sigma_{\text{свз}} \quad \vee \quad \sigma_{\mu H}=\sigma_{\text{вр}}. \qquad (3.45')$$

Формулы (3.45) справедливы для любой поверхности S, но без равенств (3.45'), так как в общем случае на поверхности находятся ещё независимые поверхностные массы и, следовательно, также зависимые массы первого типа (с плотностями $\sigma_{\varepsilon\,\text{свб}}$ $\vee$ σ_μ^0). Согласно (3.45) плотность зависимых, масс второго типа пропорциональна коэффициенту контрастности, и среднему значению нормальной компоненты поля **E** $\vee$ **H**.

В случае объёмного (непрерывного) нарушения однородности среды аналогом коэффициента контрастности является градиент проницаемости, делённый на удвоенную проницаемость. Плотность зависимых объёмных масс второго типа пропорциональна абсолютной величине этого вектора и компоненте поля по его направлению.

III. Преломление поля на поверхности раздела

Обозначим через α угол отклонения направления поля вблизи поверхности S от нормали n к ней (при направлении n от V_1 к V_2). Очевидно, что тангенс угла α равен отношению полной тангенциальной к поверхности S τ - компоненты поля к его n - компоненте, нормальной к этой поверхности. Следовательно, у поверхности S

$$\operatorname{tg}\alpha_E = \frac{E_\tau}{E_n}, \quad \operatorname{tg}\alpha_D = \frac{D_\tau}{D_n} \quad \vee \quad \operatorname{tg}\alpha_H = \frac{H_\tau}{H_n}, \quad \operatorname{tg}\alpha_B = \frac{B_\tau}{B_n}, \qquad (3.46)$$

где индексами E, D, H, B отмечены углы α, относящиеся к полям соответствующих векторов.

В правой части каждого из равенств (3.46) имеем отношение двух величин, из которых одна непрерывна на поверхности S, а другая терпит на ней разрыв (см. рис. 3.9, *а, б*). Из этого следует, что определяемые формулами (3.46) углы α должны терпеть разрывы на поверхности S. Согласно (3.41) и (3.41'') имеем из (3.46)

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_E^{(2)}}{\operatorname{tg}\alpha_E^{(1)}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_D^{(2)}}{\operatorname{tg}\alpha_D^{(1)}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad \vee \quad \frac{\operatorname{tg}\alpha_H^{(2)}}{\operatorname{tg}\alpha_H^{(1)}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_B^{(2)}}{\operatorname{tg}\alpha_B^{(1)}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \qquad (3.46')$$

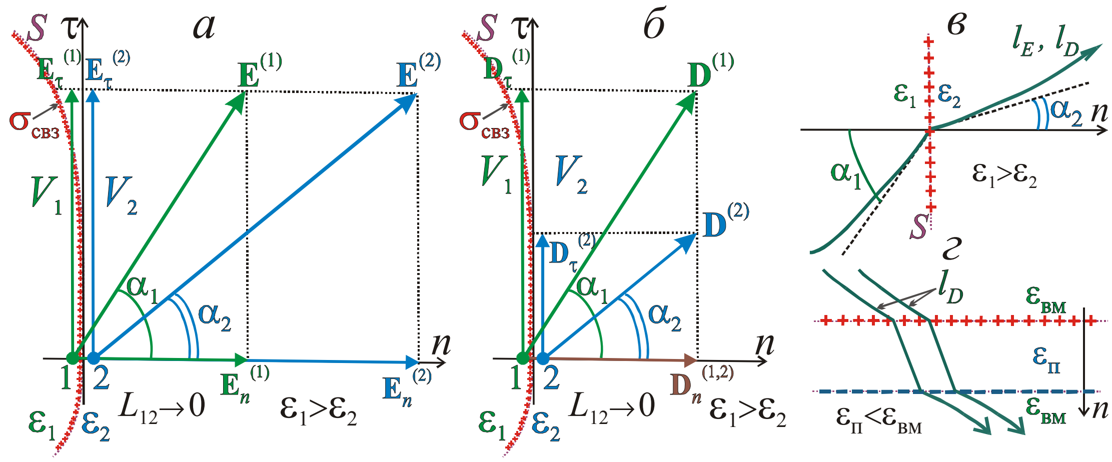

Рис. 3.9.

Преломление векторных линий поля на поверхности раздела S сред с разной проницаемостью.

Векторы **E** (*а*), **D** (*б*) и векторные компоненты этих векторов у границы областей V_1 и V_2; векторная линия l_E или l_D проходящая через поверхность раздела (*в*); векторные линии l_D, проходящие через плоскопараллельный слой (*г*)

Таким образом, силовые линии и линии индукции (смещения) при прохождении через поверхность раздела S резко меняют своё направление, т. е. преломляются (рис. 3.9, *в*), причём тангенс угла α меняется пропорционально проницаемости среды. Отклонение направления поля от нормали n меньше в среде с меньшей проницаемостью. Векторные линии l_E, l_D, l_H, l_B полей **E**, **D**, **H**, **B** как бы стремятся пройти среду с меньшей проницаемостью по более короткому пути (рис. 3.9, *г*).

Из (3.46') следует, что если на одной из сторон поверхности S поле нормально к S ($\operatorname{tg}\alpha=0$) или тангенциально к S ($\operatorname{tg}\alpha=\infty$), то таким же оно является на другой её стороне. Иначе говоря, если векторные линии "встречают" поверхность раздела S под нулевым углом α к нормали n, или направлены по касательной к S, то они не преломляются.

§ 5. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ПРИСУТСТВИИ ПРОВОДНИКОВ

Проводник – тело, отличающееся способностью проводить электричество. Если в проводнике создать электрическое поле **E**, то в нём возникнет также электрический ток, т. е. движение электричества (в общем случае) обоих знаков: положительного по направлению поля **E** и отрицательного – в противоположном направлении, либо одного из них.

Об электрическом токе и об электропроводности среды (тел) будет идти речь в следующей главе. Для интересующего нас здесь влияния проводников на электростатическое поле неважно, какова их электропроводность, лишь бы она не была нулевой.

I. Влияние проводящего включения

Представим себе, что мы внесли проводник C в первичное электрическое поле $\mathbf{E}^{\text{прв}}$, создаваемое некоторыми зарядами $e_{\text{прв}}$. Допустим пока, что других проводников нет и что диэлектрическая проницаемость ε всюду равна единице (диэлектрики отсутствуют). Допустим также, что до внесения в поле $\mathbf{E}^{\text{прв}}$ проводник C был всюду нейтральным, т. е. в любом его элементе объёма dV и на любом элементе dS его поверхности находились положительные и отрицательные заряды в равных количествах. Под действием поля в проводнике возникает электрический ток, вследствие чего у ограничивающей его поверхности S, за которой окружающая непроводящая среда (или вакуум) препятствует движению электричества, появляется слой зарядов, положительных на передней (считая по направлению поля) стороне проводника и отрицательных на тыльной его стороне. Этот слой чрезвычайно тонкий и, следовательно, можно считать, что на поверхности проводника возникают поверхностные заряды с плотностью σ, причём $\sigma>0$ на передней части поверхности проводника и $\sigma<0$ на тыльной части его поверхности. Разделение зарядов, очевидно, не влияет на их общие количества, следовательно, сумма зарядов проводника равна нулю, как и до внесения его в поле, т. е. проводник в целом остаётся незаряженным (рис. 3.10). Но разделённые заряды создают внутри и вне проводника вторичное поле $\mathbf{E}^{\text{втр}}$.

До тех пор, пока ток в проводнике существует, поверхностные заряды на нём накапливаются и значения $|\sigma|$ увеличиваются, т. е. производная по времени $\partial\sigma/\partial t\neq 0$ и,

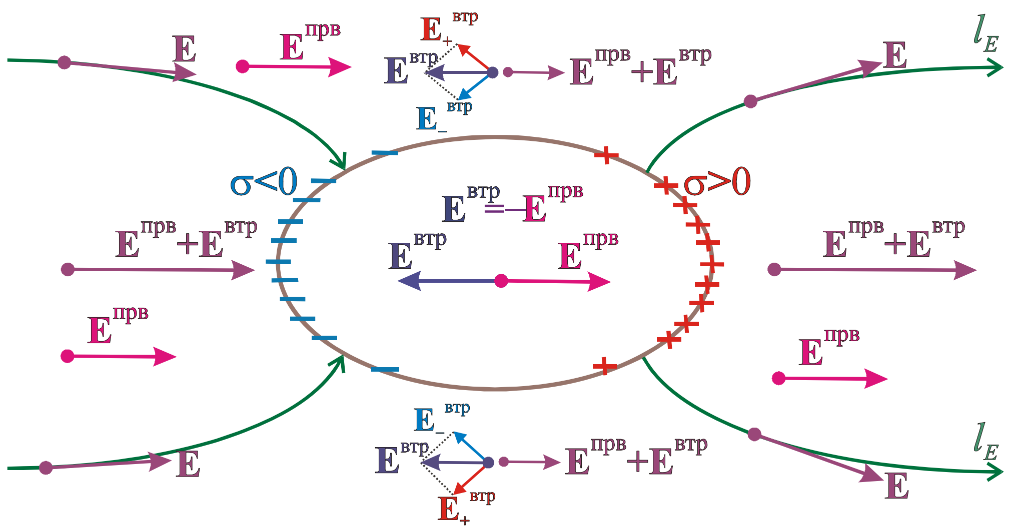

Рис. 3.10.

Проводник в однородном электростатическом поле.

При $\mathbf{E}^{\text{втр}}$ указаны знаки «+» и «–» зарядов, создающих это поле следовательно, условие (2.7) постоянства поля **E** не выполняется; оно меняется. Для постоянства, поля **E** необходимо, чтобы ток в проводнике прекратился и, следовательно, чтобы суммарное поле **E** в проводнике обратилось в нуль. Это означает, что заряды на поверхности проводника должны распределиться так, чтобы в любой точке внутри проводника они создавали поле $\mathbf{E}^{втр}=-\mathbf{E}^{прв}$.

Такая компенсация поля $\mathbf{E}^{прв}$ полем $\mathbf{E}^{втр}$ возможна, потому что поле $\mathbf{E}^{втр}$, как показано на рис. 3.10, внутри включения направлено так, чтобы ослаблять суммарное поле **E** сравнительно с полем $\mathbf{E}^{прв}$. К моменту ослабления поля до нуля (когда в проводнике сумма $\mathbf{E}^{втр}+\mathbf{E}^{прв}=0$) накопление зарядов (увеличение $|\sigma|$) прекращается, и их поле становится постоянным.

Образование зарядов e^+ и e^- на поверхности проводника при внесении его в электростатическое поле называют *электростатической индукцией*, а заряды e^+ и e^-, возникающие на проводнике, – *индуцированными* (наведёнными). Первичное поле, вызывающее явление индукции, и заряды $e_{прв}$, создающие это поле называют *индуцирующими.*

Суммарное поле $\mathbf{E}=\mathbf{E}^{прв}+\mathbf{E}^{втр}$ впереди и сзади проводника "сильнее" (больше по абсолютной величине), а по бокам проводника "слабее" первичного поля. Искажение поля получается таким, как будто проводник стягивает к себе проходящие поблизости силовые линии.

Влияние, оказываемое проводником на электростатическое поле, аналогично влиянию диэлектрика на это поле (см. рис. 3.6, *б*), но оно сильнее. В частности, внутри проводника поле **E** ослабляется до нуля (рис. 3.11).

Влияние проводника на электрическое поле зависит в общем случае от формы и размеров этого проводника и от характера первичного поля.

Обозначив через $e_{прв}$ и $e_{инд}$ (e^+ или e^-) индуцирующий и индуцируемый заряды, имеем

$$|e_{инд}|\le|e_{прв}|, \qquad |e_{инд}|=e^+=-e^-. \qquad (3.47)$$

Знак равенства в $(3.47)_1$ соответствует случаю, когда проводник окружает индуцирующий заряд со всех сторон и, следовательно, все линии l_E, «посылаемые» или «собираемые» этим зарядом, перехватываются

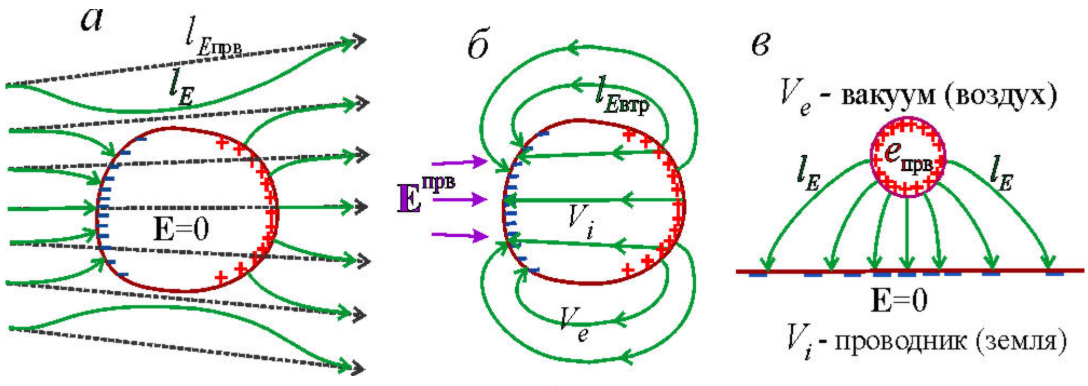

Рис. 3.11.

Проводник в электростатическом поле.

Векторные линии l_E, $l_{Eпрв}$ (*а*) и векторные линии $l_{Eвтр}$ (*б*). "Неудачная попытка" создать постоянное электрическое поле в проводнике (например, в земле) при помощи расположенного вне проводника заряда $e_{прв}$ – источника электростатического поля $\mathbf{E}^{прв}$ (*в*) проводником. Особым является случай, когда внесённый в поле $\mathbf{E}^{\text{прв}}$ проводник C простирается до бесконечности в каком-либо направлении. В этом случае один из индуцированных зарядов удаляется на бесконечность и его поле на конечных расстояниях равно нулю. Такой случай мы имеем, когда «заземляем» проводник и отводим таким образом один из индуцированных зарядов «к земле».

В отличие от возникающих на поверхности диэлектрика связанных зарядов, индуцированные на поверхности проводника заряды являются свободными. При желании можно полностью разобщить заряды e^+ и e^-.

Представим себе теперь, что кроме проводника C в пространстве имеется ещё другой проводник C', в частности, это может быть проводник, на котором находится индуцирующий заряд $e_{\text{прв}}$. В этом случае на проводнике C' под действием поля зарядов, индуцированных на проводнике C, появляются также индуцированные заряды. Поле этих зарядов, в свою очередь, индуцирует дополнительные заряды на проводнике C и так далее. В результате этого явления, называемого взаимной электростатической индукцией, на обоих проводниках C и C' появляются заряды с поверхностной плотностью σ, удовлетворяющей условиям обращения в нуль суммарного поля в любой точке внутри каждого из проводников и равенства нулю суммы индуцированных зарядов на каждом проводнике. Аналогичным условиям удовлетворяют индуцированные заряды в случае нескольких проводников.

В присутствии диэлектриков электростатическая индукция осложняется. Поле индуцированных зарядов вызывает дополнительную поляризацию диэлектриков и соответствующие ей связанные заряды. Эти (дополнительные) заряды в свою очередь индуцируют заряды на проводниках и т. д.

Допустим теперь, что заряд e введён в область V, занятую проводником C. В этом случае электричество со знаком заряда e движется в поле $\mathbf{E}$ заряда e от него к поверхности проводника, а электричество другого знака движется к заряду e и, не встречая препятствия, достигает заряда e. Поле становится постоянным, когда заряд полностью нейтрализуется приходящим к нему электричеством, т. е. когда к заряду e прибывает заряд $e'=-e$, причём на поверхности проводника оказывается заряд $e''=-e'=e$ с плотностью σ, удовлетворяющей условию равенства нулю поля $\mathbf{E}$ в проводнике. Таким образом, заряд e переходит на поверхность проводника, и этот проводник оказывается заряженным. В данном случае проводник приобретает «собственный» («наложенный» на него) заряд $e_{\text{сбс}}=e$. Такой же собственный заряд $e_{\text{сбс}}$ приобретёт проводник, если заряд e приведём в соприкосновение с поверхностью этого проводника. Заряд $e_{\text{сбс}}$, как и индуцированные заряды, распределяется по поверхности проводника так, чтобы электростатическое поле $\mathbf{E}$ внутри проводника было равно нулю.

Из этого следует, что нельзя произвольно задавать распределение заряда $e_{\text{сбс}}$ по поверхности S проводника C и нельзя в общем случае считать эту поверхность равномерно заряженной. Функция $\sigma(q)$ положения точки q на S должна удовлетворять некоторому интегральному уравнению. В случае уединённого проводника (т. е. вдали от других проводников, зарядов и нарушений однородности диэлектрика) это – уравнение (4.93) с подстановкой S вместо $S_\text{а}$ (уравнение Робэна, см. главу четвёртую). Его решением является σ=const для проводника сферической формы (см. раздел IV, § 6 главы четвёртой). В общем случае величина $|\sigma|$ имеет наибольшие значения на наиболее выпуклых частях поверхности уединённого проводника (в случае проводника в форме "стержня" – у его концов).

Обозначим индексами i и e величины, относящиеся к точкам, находящимся внутри и вне некоторого проводника C. Из сказанного выше следует, что в электростатическом поле внутри проводника

$$\mathbf{E}^i=0, \quad \mathbf{D}^i=0, \quad \operatorname{grad} U^i=0, \quad U^i=U_C, \tag{3.48}$$

где U_C – значение потенциала во всех точках проводника C. В частности, на поверхности проводника, на её внутренней стороне,

$$E_n^i=-\frac{\partial U^i}{\partial n}=0,\; E_t^i=-\frac{\partial U^i}{\partial t}=0,\; D_n^i=0,\; D_t^i=0. \tag{3.48'}$$

Из (3.48) следует, что область V, занимаемая проводником, является эквипотенциальной. Легко убедиться, что в этой области нет зарядов, т. е. что в любом элементе dV объёма проводника (заряженного или незаряженного) алгебраическая сумма зарядов равна нулю. Действительно, согласно (3.48) в любой точке внутри проводника $\operatorname{div}\mathbf{D}^i=0$, $\operatorname{div}\mathbf{E}^i=0$ и, следовательно,

$$\delta^i_\text{свб}=0, \qquad \delta^i_\text{плн}=0. \tag{3.49}$$

Легко понять, что необъёмных зарядов внутри проводника тоже нет, так как согласно (3.48) потоки векторов **D** и **E** через любую замкнутую поверхность, взятую внутри проводника, равны нулю. Следовательно, согласно $(3.13'')_1$ и $(3.27)_1$ сумма зарядов (свободных, полных) всякого вида (объёмных, необъёмных) в любой части области, занятой проводником, должна быть равна нулю. Заряды (поверхностные) могут находиться только на поверхности проводника. В отсутствии диэлектрической среды (диэлектрика) – это свободные заряды: наложенные, индуцированные или и те и другие. В общем случае на поверхности проводника имеются ещё связанные заряды. На ней также может быть расположен двойной слой.

II. Поле у поверхности проводника

Согласно $(3.28)_1$, $(3.32)_1$ и $(3.29)_1$, $(3.32'')_1$, $(3.29')_1$, $(3.27)_1$, на внешней стороне («e») поверхности S проводника C в непроводящей среде, окружающей проводник

$$E_t^e=-\frac{\partial U^e}{\partial t}=-\frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\frac{\partial\eta_{ie}}{\partial t}, \qquad U^e=U_C+\frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\eta_{ie}, \tag{3.50}$$

$$D_n^e=\sigma_\text{свб}, \qquad E_n^e=\frac{\sigma_\text{свб}}{\varepsilon_\text{а}}, \qquad \frac{\partial U^e}{\partial n}=-\frac{\sigma_\text{свб}}{\varepsilon_\text{а}}, \tag{3.50'}$$

$$e^C_{\text{свб}} = \int\limits_{S_C} \sigma_{\text{свб}}\, dS = \int\limits_{S_C} \left(\mathbf{D}^e\ \mathbf{dS}\right) = -\varepsilon_0 \cdot \int\limits_{S_C} \varepsilon_e \cdot \frac{\partial U^e}{\partial n}\, dS, \qquad (3.50'')$$

где $e^C{}_{\text{свб}}$ – суммарный свободный заряд проводника (на его поверхности S_C).

Если на проводнике нет двойного слоя, то вместо (3.50) имеем

$$E^e{}_t=0, \quad \partial U^e/\partial t=0, \quad U^e=U^i=U_C. \qquad (3.51)$$

Если проводник не заряжен ("электрически нейтрален"), т. е. если сумма зарядов, находящихся на его поверхности S_C, равна нулю, то интегралы в (3.50'') обращаются в нуль, хотя величины $\sigma_{\text{свб}}$, $D^e{}_n$ и $\partial U^e/\partial n$ на этой поверхности могут отличаться от нуля, так как на ней могут находиться индуцированные заряды e^+ и $e^-=-e^+$. При таких зарядах на проводнике C напряжение $\mathcal{E}_{C\infty}$ поля **E** между проводником и бесконечностью может иметь нулевое значение. В частности, это верно для случая, когда через проводник проходит плоскость нечётной симметрии поля.

Согласно $(3.51)_1$ и (3.50') у поверхности проводника

$$E^e{}_n=\pm E^e, \qquad \sigma_{\text{свб}}=\varepsilon_{\text{а}}\cdot E^e{}_n=\pm\varepsilon_{\text{а}}\cdot E^e, \qquad (3.52)$$

где верхние знаки относятся к участкам поверхности проводника, на которых поле направлено от него, а нижние знаки – к её участкам, на которых поле направлено к проводнику. Таким образом, у поверхности проводника электростатическое поле **E** имеет только нормальную к ней компоненту. Силовые линии l_E подходят к поверхности проводника и отходят от неё по нормалям к этой поверхности (см. рис. 3.10, рис. 3.11, *а*, *в*).

Пусть C – проводник конечных размеров, соединённый тонкой проводящей нитью с проводником (практически) бесконечно больших размеров (с землёй). Допустим, что до присоединения нити проводник C не был заряжен, но на нём были индуцированные полем заряды e^+ и e^-. Присоединив заземление, мы удалили один из зарядов и обратили в нуль потенциал проводника. Проводник окажется заряженным в том смысле, что теперь влияет на поле только один из его зарядов. Величина этого заряда определяется согласно (3.50'') потоком вектора $\mathbf{D}^e$ через поверхность проводника.

III. Электростатический экран

Формулы (3.48) справедливы при любом поле и любых зарядах вне проводника и на его поверхности. Можно доказать, что если в проводнике имеется полость, то эти формулы справедливы также для области Θ, занимаемой этой полостью.

Допустим, что проводник C ранее был сплошным и находился в том же поле, в котором он фактически находится, а затем из, области Θ была каким-то способом изъята проводящая среда и в результате образовалась полость. Пусть S[ω] – произвольно взятая внутри области Θ замкнутая поверхность, ограничивающая часть ω области Θ. Поток ψ вектора **D** через эту поверхность должен быть равен нулю, так как при образовании полости не появились заряды в области Θ. Но для равенства нулю потока ψ через любую замкнутую поверхность в области Θ необходимо, чтобы во всех точках этой области поле было равно нулю. Однако этот вывод, очевидно, несправедлив для полости, содержащей заряд, а также для аперифрактической полости, охватывающей проводник, с полостью, в которой имеется заряд.

Следовательно, проводник, отделяющий со всех сторон некоторую область Θ от остального пространства, защищает её от зарядов, находящихся вне этой области, обращая в нуль их поле внутри неё. Он является для неё электростатическим экраном (рис. 3.12, *а*). Таким экраном может, в частности, служить тонкая проводящая оболочка. В экранированной области Θ (в которую не внесены заряды) поле равно нулю при любом электростатическом поле **E** вне неё.

Поместим во внутреннюю точку q области Θ, занятой полостью, заряд e. Допустим, что проводник находится в вакууме и что других проводников в пространстве нет. Под действием поля, создаваемого зарядом $e=e_{\text{прв}}$, в проводнике возникает движение зарядов, в результате которого после установления поля на поверхности $S[\Theta]$, т. е. на стенке (границе) полости Θ, появится заряд e', а на наружной поверхности S проводника C – заряд $e''=-e'$ (рис. 3.12, *б*). Докажем, что в данном случае $e'=-e$. Для этого возьмём в теле проводника замкнутую поверхность $S([\Theta])$, охватывающую область Θ (вместе с её "стенкой" $S[\Theta]$) и содержащую заряды $e=e_{\text{прв}}$ и e'. Поле **E**, **D** во всех точках этой поверхности равно нулю, следовательно, поток вектора $\mathbf{D}^i$ через эту поверхность также равен нулю. Поэтому согласно $(3.27)_1$ сумма зарядов $(e+e')$, заключённых внутри поверхности $S([\Theta])$, должна быть равна нулю, откуда $e'=-e$. Таким образом, внесение заряда $e=e_{\text{прв}}$ в полость проводника сопровождается появлением такого же по величине заряда e'' на его наружной поверхности.

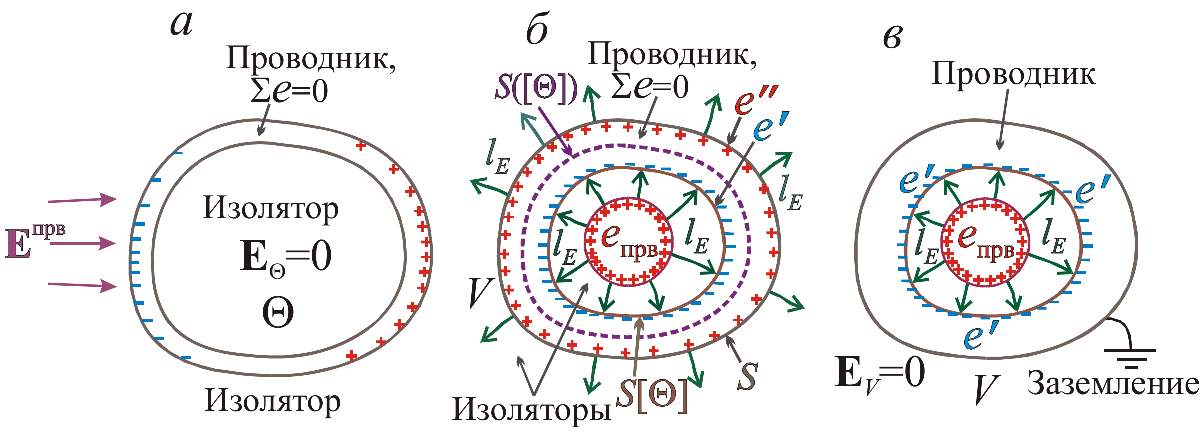

Рис. 3.12.

К электростатическому экранированию: локальной области Θ от "внешнего" электростатического поля $\mathbf{E}^{\text{прв}}$ (*а*); неограниченной снаружи "внешней" области V от поля $\mathbf{E}^{\text{прв}}$ локального заряда $e=e^{\text{прв}}$ (*б*, *в*)

Если заряд e привести в соприкосновение со стенкой полости,

(с внешней стенкой полости, если занимаемая полостью область Θ – перифрактическая, т. е. если она ограничена изнутри поверхностями некоторых проводников)

то заряд e и заряд e' будут взаимно нейтрализованы, причём поле в полости Θ исчезнет, а во внешнем пространстве останется без изменения поле заряда $e''=e$.

Посмотрим, как влияет экран на поле, создаваемое точечным зарядом $e=e_q$, находящимся внутри экрана. При отсутствии проводящей оболочки вокруг заряда e_q во всём пространстве имелось бы сферически симметричное поле, силовые линии которого являлись бы лучами, расходящимися (при $e_q>0$) из точки q равномерно во все стороны и продолжающимися до бесконечности. С появлением экрана все силовые линии, расходящиеся из точки q, обрываются на его внутренней стороне, а пространство, окружающее экран, заполнилось силовыми линиями, расходящимися от его внешней стороны. При этом силовые линии искривляются так, что подходят к внутренней поверхности экрана и отходят от его внешней поверхности по нормалям к этим поверхностям и с густотой, пропорциональной плотности поверхностных зарядов на них. Таким образом, поле внутри и вне экрана отличается от первичного поля (поля заряда e_q).

Вносимые экраном искажения незаметны только на расстояниях от точки q, достаточно малых сравнительно с расстояниями от неё до экрана, и (вне экрана) на расстояниях от экрана, достаточно больших сравнительно с его линейными размерами. Исключением является случай, когда экран представляет собой сферический слой с центром в точке q. В этом случае поле вне экрана, совпадает с первичным полем. При более сложном первичном поле, например, если внутри экрана находится совокупность точечных зарядов e_q, неискажающим является экран, поверхности которого совпадают с двумя какими-либо замкнутыми эквипотенциальными поверхностями первичного поля, охватывающими источники этого поля (зарядами e_q). Если с такой поверхностью совпадает только одна из поверхностей экрана (внутренняя или внешняя), то не искажается поле соответственно внутри или вне экрана.

В том, что экран не искажает поле в области пространства, к которой обращена поверхность экрана, совпадающая с эквипотенциальной поверхностью первичного поля, можно убедиться на основании теоремы единственности (см. § 6). Действительно, поток вектора **D** через любую замкнутую эквипотенциальную поверхность, охватывающую заряды e, не меняется при введении экрана. Ясно также, что эта поверхность остаётся эквипотенциальной, если с ней совпадает поверхность экрана. Следовательно, на этой поверхности сохраняется краевое условие III типа (1.106'), и поэтому не должно измениться поле в области, ограничиваемой этой поверхностью.

Из изложенного следует, что экран не защищает окружающее его пространство от поля зарядов, находящихся внутри экрана; он может только изменить это поле, ослабить его в одних местах, усилить в других и исказить форму силовых линий. Однако поле вокруг экрана определяется зарядом $e''=e$, находящимся на внешней стороне экрана, а этот заряд, как и в случае обычного заряженного проводника, можно отвести к земле и таким способом обратить в нуль его поле. Иначе говоря, заземлённый экран защищает окружающее его пространство от поля, возникающего при внесении зарядов в полость экрана (рис. 3.12, *в*).

Пространство вне заземлённого экрана можно рассматривать как область, заключённую между ним и бесконечно удалённой проводящей поверхностью. Эта область является полостью в проводнике, состоящем из двух проводящих оболочек, соединённых заземлением. Без этого соединения получилась бы перифрактическая полость, в которой можно построить замкнутую поверхности (охватывающую проводник с полостью, с зарядами e, e', e'') с ненулевым потоком вектора **D** (см. начало этого раздела).

Аналогично можно интерпретировать действие заземления в случае обычного заряженного проводника (без полости с зарядом в ней).

IV. Поле в присутствии проводников

Все формулы, полученные для электростатического поля **E** в отсутствие проводников, остаются верными и в их присутствии с оговоркой о необходимости учитывать поле зарядов, индуцированных на проводниках, и принимать во внимание, что любые заряды на поверхностях проводников распределены с плотностью, которая должна удовлетворять условию обращения в нуль напряжённости поля **E** внутри каждого проводника.

В предыдущих параграфах этой главы мы видели, что в присутствии диэлектриков определение поля (при решении прямых задач) затрудняется из-за связанных зарядов, зависящих от этого поля. В присутствии проводников возникает новое принципиальное затруднение, состоящее в том, что плотность свободных поверхностных зарядов на проводниках также нам неизвестна до определения поля **E**. Более того, обычно оказываются неизвестными плотности всех источников электрического поля, так как ими часто являются только поверхностные заряды (свободные и связанные), находящиеся на проводниках, и связанные заряды, возникающие в местах нарушения однородности среды.

Однако поле **E** в областях пространства, занятых проводниками, равно нулю. Что же касается поля в остальной части пространства, то влияние, оказываемое на него проводниками (их зарядами), учитывается краевыми условиями на их поверхностях. Для этого, как будет показано в следующем параграфе, достаточно знать одну из двух величин для каждой из этих поверхностей: суммарный свободный заряд проводника или его потенциал. Но одну из этих величин всегда можно задавать произвольно.

Действительно, суммарный заряд проводника можно произвольно менять наложением соответствующего, свободного заряда, а потенциалу проводника можно придавать желаемое значение с помощью стороннего напряжения (см. раздел II, § 3 главы четвёртой), включаемого между проводником и точкой отсчёта потенциала. В первом случае мы не можем произвольно задавать потенциал проводника, а во втором – его заряд.

§ 6. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ СТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ПРИСУТСТВИИ СРЕДЫ

Прямой задачей статического поля в присутствии среды является определение поля (**E**, **D** V **H**, **B**) по заданной проницаемости среды (ε V μ) и заданным независимым массам (зарядам) или их полю. Свободные заряды проводников не являются полностью независимыми, но считаются заданными поверхности проводников; также считается заданным потенциал или собственный заряд каждого из них. Вместо постоянных магнитных масс может быть задана постоянная намагниченность, т. е. поле $\mathbf{J}^0$.

Решить прямую задачу можно с помощью системы дифференциальных уравнений (3.24), (3.25), которую сводят к уравнению (3.31), являющемуся аналогом уравнения (2.46).

В § 8 главы второй мы говорили о возможности определения потенциала U поля $\mathbf{f}$ в области V по источникам этого поля, заданным только в этой области. В присутствии среды неполнота данных об источниках определяемого поля, находящихся внутри и вне области V, в которой требуется его определить, принципиально неминуема, так как до определения поля мы из величин, характеризующих источники поля, обычно знаем только те, которые можно произвольно задавать: для электрического поля – свободные заряды в непроводящей среде и суммарные значения свободных зарядов на незаземлённых проводниках, а для магнитного поля – постоянные магнитные массы. Остаются (до определения поля) неизвестными плотности связанных зарядов второго типа в непроводящей среде, плотности любых (свободных и связанных) зарядов на поверхности проводников и плотности временных магнитных масс второго типа.

Для неизвестных плотностей электрических зарядов или магнитных масс можно составить интегральные уравнения (см. § 4 главы четвёртой). Решая эти уравнения, можно определить не задаваемые нами источники поля и свести задачу к определению поля заданных масс по формулам (2.12), (2.45).

Связанные заряды первого типа в непроводящей среде и временные магнитные массы первого типа можно, считать заданными, поскольку заданы среда и независимые массы, к которым приурочены зависимые массы первого типа.

I. Условия единственности

Уравнение (3.31) для потенциала U позволяет по указанным неполным сведениям об источниках поля, заданным в области V, и по проницаемости среды, заданной также только в этой области, определить поле, создаваемое в ней источниками всех видов, где бы они ни находились. Расчёт поля в произвольной среде с помощью уравнения (3.31), как и поля в вакууме по уравнению (2.46), сводится к нахождению функции U, являющейся частным решением этого уравнения и удовлетворяющей дополняющим условиям, обеспечивающим единственность его решения, т. е. позволяющим исключить бесчисленное множество частных решений, соответствующих полям, получающимся при других средах и независимых массах вне области V. Задание этих дополняющих условий заменяет задание среды и независимых источников вне области V.

Какие дополняющие условия достаточны для этой цели, должна указать теорема единственности, которую можно сформулировать для уравнения (3.31), пользуясь результатами, полученными в разделе I, § 8 главы первой, где изложение велось в общем виде применительно к уравнению $(1.96)_1$. Переход к уравнению (3.31) и к соответствующей ему теореме единственности совершается подстановками

$$\Lambda=\varepsilon,\quad w^{v}=\delta_{\text{свб}}/\varepsilon_0 \qquad \vee \qquad \Lambda=\mu,\quad w^{v}=\delta^{0}=-\operatorname{div}\mathbf{J}^{0}$$

и заменой формул (1.106'), (1.110') формулами (3.33), (3.32), (3.32''). Эта замена формул сводится к подстановкам

$$Q = -\frac{1}{\varepsilon_0} \cdot e_{V\,\text{свб}}, \qquad \zeta_{12} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \eta_{12}, \qquad \varphi_{12} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \sigma_{\text{свб}}$$

для электростатического поля и

$$Q = -m^0, \qquad \zeta_{12} = \eta_{12}, \qquad \varphi_{12} = -\sigma^0$$

для магнитостатического поля.

Особыми поверхностями, на которых задаются условия (3.32), (3.32''), являются поверхности, несущие первичные (т. е. независимые) массы (простые или двойные слои), и поверхности раздела между средами с различной проницаемостью. В электрическом поле особыми являются также поверхности проводников, но они, ограничивают области, в которых поле равно нулю (см. ниже замечание 3). Особыми точками $q_{\text{ос}}$ и линиями $l_{\text{ос}}$ являются точки, в которых имеются точечные массы или диполи, и линии, на которых имеются линейные массы или линейные диполи. Условия у этих точек и линий можно получить, применяя $(3.27)_{1,3}$ к малой окрестности точки или элемента длины линии (см. ниже замечания 9 и 10). Если в этой окрестности среда однородна, то условия для U получаются из (3.38'), $(3.38'')_{1,3}$ заменой знаков равенства, знаками стремления ($\to$) [см. сказанное выше о применимости формул (3.38), (3.38'), (3.38'')].

II. Замечания

К замечаниям, приведенным в разделе II, § 8 главы первой, надо применительно к рассматриваемому полю добавить следующее.

1. Если область Θ отделена проводящей стенкой (экраном) от остального пространства и в этой области нет независимых зарядов, то в ней поле $\mathbf{E}=0$ и потенциал U=const, так как от поля зарядов, находящихся за экраном, область Θ защищена (см. раздел III § 5).

Если проводник, окружающий эту область, простирается до бесконечности (экран заземлён), то на нём и, следовательно, во всей области Θ потенциал U=0. Это верно и в том случае, когда область Θ незамкнутая и её граница продолжается до бесконечности.

2. Из сказанного выше следует, что если пространство разделено неограниченными проводящими перегородками на простирающиеся до бесконечности области Θ_k, то заряды, находящиеся в какой-либо из них, не создают поля в остальных областях или; точнее, это поле в них компенсируется полем зарядов, индуцированных на перегородках. Иначе говоря, поля в областях Θ_k взаимно независимы.

3. Так как внутри проводников электростатическое поле $\mathbf{E}$ равно нулю, то они не включаются в состав области V, в которой определяется такое поле $\mathbf{E}$. Поверхности проводников служат участками границы $S[V]$ области V. На поверхности каждого из проводников, в соответствии со сказанным в разделе IV, § 5, может быть задано условие (третьего или первого типа):

$$\oint\limits_{S[\Theta_k]} \varepsilon \cdot \frac{\partial U}{\partial n}\, dS = -\frac{1}{\varepsilon_0} \cdot e_{k\,\text{свб}} \quad \text{или} \quad U = U_k\,, \tag{3.53}$$

где U_k, $e_{k\,\text{свб}}$ и $S[\Theta_k]$ – потенциал, заряд и поверхность k-го проводника. В частности, если проводник заземлён, то на его поверхности является заданным условие U_k=0, а если он не заземлён и на него не наложен заряд, то на его поверхности является заданным условие (третьего типа)

$$\oint\limits_{S[\Theta_k]} \varepsilon \cdot \frac{\partial U}{\partial n}\, dS = 0 \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial t} = 0\right), \tag{3.53'}$$

так как сумма индуцированных на нём зарядов равна нулю.

4. Если независимые массы и нарушения однородности среды находятся в области Θ, ограниченной со всех сторон, то в условие регулярности на бесконечности (2.47) надо подставить вместо суммарной массы m_Θ сумму первичных масс, разделённую на проницаемость (ε **V** μ) среды вне области Θ.

Случай, когда независимые массы простираются до бесконечности, аналогичен соответствующему случаю для масс в вакууме (см. замечание 1 § 8 главы второй). В случае, когда среда в далёких частях пространства однородна только по лучам l_R, исходящим из некоторой конечной точки O, следует вместо ε **V** μ взять проницаемость среды, усреднённую по бесконечно удалённой поверхности S:

$$\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{1}{4\pi} \cdot \int \varepsilon\, d\Omega \qquad \mathbf{V} \qquad \mu_{\text{ср}} = \frac{1}{4\pi} \cdot \int \mu\, d\Omega\,, \tag{3.54}$$

где $d\Omega$ – телесный угол при вершине O конической поверхности с направляющей $l[dS]$, а dS – элемент поверхности S.

5. В соответствии с замечанием 11 § 8 главы первой в области V, в которой нет независимых масс, потенциал U определяется полностью заданием краевых условий и проницаемости среды в этой области. Если в случае электрического поля областью V является всё пространство, кроме его частей, занятых проводниками, то, полагая поле регулярным на бесконечности, можно считать, что оно полностью определяется функцией $\varepsilon(a)$ и значениями зарядов проводников или их потенциалов.

6. Необъёмную массу можно представить как очень плотную объёмную массу, определяемую дельта - функцией Дир**а**ка $\delta_{\text{Д}}(q)$ (см. раздел V главы второй), а поверхность раздела заменить переходной зоной, в пределах которой (по нормали к её границам) проницаемость меняется очень интенсивно, но непрерывно. Имея это ввиду, можно сказать, что уравнением (3.31) и краевыми условиями поле **E V H** в области V определяется по заданным в ней функциям $\delta_{\text{свб}}(q)$ и $\varepsilon(q)$ **V** $\delta^0(q)$ и $\mu(q)$.

7. Согласно (1.110') на каждой особой поверхности S функция U должна удовлетворять двум условиям сопряжения (3.32) и (3.32''), в которых предусмотрено, что в общем случае эта поверхность может быть поверхностью раздела и на ней могут находиться первичные массы: простые и двойные слои. В частных случаях условия сопряжения упрощаются. Наиболее часто встречается случай поверхности раздела, на которой нет ни двойного слоя, ни простого слоя первичных масс. В этом случае условия сопряжения сводятся к требованию непрерывности функции U и произведения нормальной производной $\partial U/\partial n$ на проницаемость среды ε V μ, т. е. к условиям (3.41')$_1$ и (3.41''').

8. Если в области V среда кусочно-однородна и в ней нет независимых масс, то в ней потенциал всюду, кроме поверхностей раздела, удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2 U=0$. Тем не менее, в этом случае обычно проектируют для функции U в различных частях области V различные аналитические выражения, учитывая необходимость разрывов нормальной производной этой функции на поверхности раздела в соответствии со вторым из условий сопряжения (3.41''').

9. Если в окрестности точечной массы $m_{q\,\text{свб}}$ V m_q^0 проницаемость среды не меняется с расстоянием от точки q (при очень малых расстояниях), например, если через точку q проходят поверхности раздела кусочно-однородной среды, то, применяя (3.27)$_{1,3}$, получаем в соответствии с (3.38)

$$\text{при } R\to 0 \qquad \mathbf{E}\to\frac{e_{q\,\text{свб}}}{4\pi\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{\text{ср}}\cdot R^2}\mathbf{1}_R \;\; \text{V} \;\; \mathbf{H}\to\frac{m_q^0}{4\pi\cdot\mu_{\text{ср}}\cdot R^2}\mathbf{1}_R, \qquad (3.53'')$$

где R – расстояние от точечной массы, а $\varepsilon_{\text{ср}}$ V $\mu_{\text{ср}}$ определяется по формуле (3.54), в которой следует считать $d\Omega$ – телесным углом при вершине q, а dS – элементом сферической поверхности S достаточно малого радиуса R с центром в точке q.

10. Если в окрестности элемента $\lambda_{q\,\text{свб}}\cdot dl$ V $\lambda_q^0\cdot dl$ линейной массы проницаемость среды зависит от угла поворота около прямой, на которой он расположен, например, если элемент, dl лежит на поверхности раздела или является элементом линии пересечения поверхностей раздела, то, применяя (3.27), получаем в соответствии с (3.38'')

$$\text{при } r\to 0 \qquad \mathbf{E}\to\frac{\lambda_{q\,\text{свб}}}{2\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{\text{ср}\alpha}\cdot r}\mathbf{1}_r \;\; \text{V} \;\; \mathbf{H}\to\frac{\lambda_q^0}{2\pi\cdot\mu_{\text{ср}\alpha}\cdot r}\mathbf{1}_r, \quad (3.53''')$$

где

$$\varepsilon_{\text{ср}\alpha}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varepsilon\, d\alpha \qquad \text{V} \qquad \mu_{\text{ср}\alpha}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mu\, d\alpha \qquad (3.54')$$

– проницаемость, усреднённая по окружности l' бесконечно умаляющегося радиуса r с центром q на элементе dl; окружность l' лежит в плоскости, нормальной к отрезку dl; $d\alpha$ – плоский угол, ограниченный двумя лучами, исходящими из точки q и проходящими через концы отрезка dl' окружности.

§ 7. ДОПОЛНЕНИЯ К ТРЕТЬЕЙ ГЛАВЕ

I. Формула Пуассона

Согласно (3.4'), $(3.2)_2$, $(2.115)_4$ однородно намагниченная среда, заполняющая область V, создаёт поле **H** с потенциалом

$$U_H^{\text{п}}(a) = \frac{1}{4\pi}\cdot\left(\mathbf{J}\ \int\limits_V \overset{q}{\nabla}\frac{1}{L_{qa}}dV\right). \tag{3.55}$$

Принимая во внимание (1.127), получаем

$$4\pi\cdot U_H^{\text{п}}(a) = -\left(\mathbf{J}\ \int\limits_V \overset{a}{\nabla}\frac{1}{L_{qa}}dV\right) = -\frac{1}{\delta_{\text{магн}}}\cdot\left(\mathbf{J}\ \int\limits_V \overset{a}{\nabla}\frac{\delta_{\text{магн}}}{L_{qa}}dV\right)$$

и согласно $(2.44'')_2$ и $(2.115)_{3,4}$

$$U_H^{\text{п}}(a) = -\frac{1}{\delta_{\text{магн}}}\cdot\left(\mathbf{J}\ \overset{a}{\nabla}U_H(a)\right) = -\left(\mathbf{J}\ \overset{a}{\nabla}U_{H\,\text{ед}}(a)\right), \tag{3.55'}$$

т. е.

$$U_H^{\text{п}}(a) = \frac{1}{\delta_{\text{магн}}}\cdot\left(\mathbf{J}\ \ \mathbf{H}(a)\right) = \left(\mathbf{J}\ \ \mathbf{H}_{\text{ед}}(a)\right), \tag{3.55''}$$

где U_H и **H** – потенциал и напряжённость поля, создаваемого однородной магнитной массой с плотностью $\delta_{\text{магн}}$, занимающей область V, а $U_{H\text{ед}}$ и $\mathbf{H}_{\text{ед}}$ – значения U_H и **H** при единичном значении $\delta_{\text{магн}}$.

Формулы (3.55'), (3.55'') определяют потенциал $U_H^{\text{п}}$ поля, создаваемого однородно намагниченным телом, через потенциал $U_{H\text{ед}}$ или напряжённость $\mathbf{H}_{\text{ед}}$ поля, которое создавала бы магнитная масса единичной плотности, если бы она замещала это намагниченное тело.

Аналогичное, включая (3.55) – (3.55''), очевидно справедливо для поля, создаваемого однородно поляризованным диэлектриком.

Согласно $(2.114)_2$, $(2.115)_{3,4}$, (2.115') поля **H** и **Г** одинаковых по форме и плотности (магнитной и гравитационной) масс $m_{\text{магн}}$ и $m_{\text{гр}}$ связаны соотношениями

$$U_H = (1/4\pi\cdot\gamma)\cdot U_\Gamma, \qquad \mathbf{H} = -(1/4\pi\cdot\gamma)\cdot\mathbf{\Gamma}; \tag{3.55'''}$$

следовательно, из (2.55') получаем *ф о р м у л у П у а с с о н а*

$$U_H = -\frac{1}{4\pi\cdot\gamma}\cdot\left(\mathbf{J}\ \overset{a}{\nabla}U_{\Gamma\,\text{ед}}\right) = -\frac{1}{4\pi\cdot\gamma\cdot\delta_{\text{гр}}}\cdot\left(\mathbf{J}\ \overset{a}{\nabla}U_\Gamma\right), \tag{3.56}$$

в которой U_Γ – потенциал гравитационного поля, создаваемого однородной массой $m_{\text{гр}}$ с плотностью $\delta_{\text{гр}}$; $U_{\Gamma\text{ед}}$ – значение U_Γ при единичном значении $\delta_{\text{гр}}$.

Формула Пуассона (3.56) представляет собой соотношение между потенциалами U_Γ и U_H гравитационного поля, создаваемого однородной гравитационной массой, занимающей какую-либо область V, и магнитного поля, создаваемого однородно поляризованным (намагниченным) магнетиком, занимающим ту же область. В соответствии с (3.55'') можно формулу (3.56) представить в виде

$$U_H = -(1/(4\pi\cdot\gamma\cdot\delta_{\text{гр}}))\cdot(\mathbf{J}\ \mathbf{\Gamma}). \qquad (3.56')$$

Соотношения (3.56), (3.56') позволяют воспользоваться результатами расчётов гравитационного поля для определения магнитного поля. Они имеют формальный характер и не предназначены для выражения физической связи между гравитационным и магнитным полями.

II. Взаимное влияние проводников

Представим себе, что в пространстве имеются n проводников C_k (k=1, 2,..., n). Допустим, что на проводниках C_k суммарные свободные заряды равны e_k, а вне этих проводников свободных зарядов нет. Согласно замечанию 5 в § 6, при заданной проницаемости среды поле полностью определяется свободными зарядами проводников e_k, следовательно, ими определяется потенциал в любой точке пространства и, в частности, на любом из этих проводников. Пусть U'_k и U''_k – значения потенциалов проводников в полях, соответствующих совокупностям e'_k и e''_k зарядов на проводниках. Можно доказать, что эти потенциалы и заряды взаимно связаны соотношением

$$\sum U'_k\cdot e''_k = \sum U''_k\cdot e'_k \quad (k=1, 2,..., n). \qquad (3.57)$$

Для проводников в неограниченном однородном диэлектрике можно из (3.57) получить соотношения

$$U_i = \sum b_{ik}\cdot e_k, \quad e_i = \sum c_{ik}\cdot U_k \quad (i=1, 2,..., n) \quad (k=1, 2,..., n), \qquad (3.58)$$

в которых множители b_{ik} и c_{ik}, называемые соответственно, *потенциальными* и *емкостными* (индукционными) *коэффициентами*, не зависят от зарядов и потенциалов проводников и полностью определяются их формами, размерами и взаимным расположением, а также диэлектрической проницаемостью среды.

Множитель c_{ik} при $i=k$ равен отношению заряда проводника C_k к его потенциалу, при условии, что остальные проводники заземлены. Он называется ёмкостью k-го проводника в системе проводников. При n=1 имеем только один емкостной коэффициент $c_{11}=e_1/U_1$. При этом, обозначая $c_{11}=C$, $e_1=e$, $U_1=U$, получаем

$$C = e/U. \qquad (3.59)$$

Этот коэффициент называется *ёмкостью уединённого проводника*.

III. О пробной массе в присутствии среды

В § 2 главы второй шла речь о пробной точечной массе m_a, с помощью которой определяются векторы $\mathbf{F}(a)$ и $\mathbf{f}(a)=\mathbf{F}(a)/(\nu\cdot m_a)$. Полю самой пробной массы там не уделялось внимания, так как оно само по себе не влияет на поле $\mathbf{f}(a)$. Можно представить пробную массу в виде однородного шарика с центром в точке наблюдения a. Сферически симметричное поле такой массы в точке a равно нулю. Сказанное остаётся справедливым при переходе от поля в вакууме к полю в неограниченной однородной среде. В общем же случае поле пробной массы в присутствии поляризующейся среды или проводников (в поле **E**) может вызвать изменение поля. Действительно, под действием поля пробной массы появятся дополнительные массы $e_{\varepsilon E}$ V $m_{\mu H}$ в местах нарушения однородности поляризующейся среды и дополнительные индуцированные заряды на проводниках. Поле всех этих дополнительных источников в общем случае не окажется равным нулю в точке a. В связи с этим в общем случае пробную массу следует представить исчезающе малой не только геометрически, но также в смысле количества массы. При этом условии её поле является столь слабым, что вызываемыми им дополнительными источниками поля можно пренебречь.

IV. Энергия поля

Масса e_a V m_a в поле **E** V **H** подвергается действию силы $\mathbf{F}(a)$. При перемещении массы под действием этой силы совершается работа. Следовательно, благодаря существованию поля мы располагаем некоторым количеством энергии. Эта энергия локализована в поле и называется энергией поля. Она распределена в пространстве с плотностью, определяемой формулами

$$\frac{dW_{\text{эл}}}{dV} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}\ \mathbf{D}) \qquad \text{V} \qquad \frac{dW_{\text{магн}}}{dV} = \frac{1}{2}(\mathbf{H}\ \mathbf{B}), \tag{3.60}$$

в которых $dW_{\text{эл}}$ и $dW_{\text{магн}}$ – электрическая и магнитная энергия в бесконечно-малой области (объёме) dV. Формулы (3.60) применимы к анизотропной среде, но не применимы к ферромагнетикам. В изотропной среде (при $\mathbf{J}^0$=0) получаем согласно (3.60) и (3.19'')

$$\frac{dW_{\text{эл}}}{dV} = \frac{\varepsilon_{\text{а}}}{2}\cdot E^2 \qquad \text{V} \qquad \frac{dW_{\text{магн}}}{dV} = \frac{\mu_{\text{а}}}{2}\cdot H^2. \tag{3.60'}$$

V. Электростатическая интерпретация функции Грина

Допустим, что в вакууме область V, ограниченная поверхностью $S[V]$, защищена заземлённым экраном, а в точке a области V находится заряд e_a. В точке q этой же области имеем потенциал

$$U_E(q) = U_E^a(q) + U_E^S(q) = \frac{e_a}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{L_{qa}} + e_a\cdot\beta(a,\, q), \tag{3.61}$$

где U_E^a – потенциал поля $\mathbf{E}^a$ заряда e_a; U_E^S – потенциал поля $\mathbf{E}^S$ заряда $e_S = -e_a$, индуцированного на внутренней стороне $S[V]$ экрана.

Зависимость множителя β от точки a объясняется тем, что распределение заряда e_S на $S[V]$ зависит от положения индуцирующего заряда e_a в области V. Согласно (3.61)

$$\frac{4\pi\cdot\varepsilon_0}{e_a}\cdot U_E(q)=\frac{1}{L_{qa}}+4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\beta(a,\,q). \qquad (3.61')$$

Второй член правой части (3.61') удовлетворяет условиям (2.100') для функции $h(a, q)$, достаточным для её однозначного определения. Действительно, в области V, очевидно, $\nabla^2 U_E^S$=0, а на поверхности $S[V]$ в любой её точке p потенциал U_E равен нулю и, следовательно, $4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\beta(a, p)=-(1/L_{ap})$. Поэтому согласно (2.100)

$$G(a,\,q)=\frac{4\pi\cdot\varepsilon_0}{e_a}\cdot U_E(q),\quad h(a,\,q)=4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\beta(a,\,q). \qquad (3.62)$$

Таким образом, функцию Грина можно интерпретировать электростатически как умноженный на $(4\pi\cdot\varepsilon_0/e_a)$ электрический потенциал, который мы имели бы в области V при условии, если бы она была ограничена заземлённым экраном и в её точку a был бы помещён заряд e_a.

Это условие принципиально осуществимо, следовательно, функция Грина существует для любой произвольно заданной поверхности $S[V]$ и любой точки a в области V.

Однако потенциал U поля **f** согласно (2.102), (2.102') выражается через нормальную производную функции Грина. Посмотрим, что соответствует этой производной в изложенной здесь интерпретации. Согласно $(3.62)_1$

$$\frac{\partial G}{\partial n}=\frac{4\pi\cdot\varepsilon_0}{e_a}\cdot\frac{\partial U_E}{\partial n}=-\frac{4\pi\cdot\varepsilon_0}{e_a}\cdot E_n\,, \qquad (3.63)$$

где n – нормаль, направленная из области V. Для плотности σ заряда e_S на поверхности S (как на тыльной стороне проводника в поле заряда e_a) справедливы формулы (3.50'), в которых для нашего случая нормаль n должна быть направлена внутрь области V. Следовательно,

$$\sigma=-\varepsilon_0\cdot E_n=\frac{e_a}{4\pi}\cdot\frac{\partial G}{\partial n}. \qquad (3.64)$$

Таким образом, множитель при $U(p)$ в (2.102), (2.102')

$$\frac{-1}{4\pi}\cdot\frac{\partial G}{\partial n}=-\frac{\sigma}{e_a} \qquad (3.64')$$

и определяется плотностью σ заряда e_S на $S[V]$. Этот заряд при единичном значении e_a называют слоем Грина.

В (3.63) знаки величин E_n и e_a совпадают, поэтому производная $(\partial G/\partial n)$<0 (функция G уменьшается с приближением точки q области V к поверхности $S[V]$ и согласно (3.64) отношение (σ/e_a)<0. Следовательно, упомянутый множитель в выражениях (2,102), (2.102') положителен.

Список литературы

1. *Альпин Л. М.* Теория поля. - М.: Недра, 1966.

2. *Альпин Л. М.* Практические работы по теории поля. - М.: Недра, 1971.

3. *Альпин Л. М., Даев Д. С., Каринский А. Д.* Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. - М.: Недра, 1985.

4. *Альпин Л. М., Даев Д. С., Каринский А. Д.* Теория полей, применяемых в разведочной геофизике (электронная версия). Часть I. Введение. Глава первая "Поле", 2019. - 104 с. http://magnetometry.ru/files/Alpin_uch_vol1_2019.pdf; https://elibrary.ru/item.asp?id=41710031.

5. *Амензаде Ю. А.* Теория упругости. - М.: Высшая школа, 1976.

6. *Бурсиан В. Р.* Теория электромагнитных полей, применяемых в электроразведке.- Л.: Недра, 1972.

7. *Гурвич И. И., Боганик Г. Н.* Сейсмическая разведка.- М.: Недра, 1980.

8. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика.- М.: Мир, 1965.

9. *Заборовский А. И.* Переменные электромагнитные поля в электроразведке. - М.: Изд-во МГУ, 1960.

10. *Иваненко Д., Соколов А.* Классическая теория поля. - М.: Гостехиздат, 1949.

11. *Каринский А. Д.* Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. Статические поля. Стационарное электрическое поле [Электронный ресурс]: учебное пособие. - М.: МГРИ-РГГРУ, 2014. - 105 с. http://mgri-rggru.ru/fondi/libraries/index.php?ELEMENT_ID=2657; http://magnetometry.ru/files/Karinskiy_lab_2014.pdf; http://www.geokniga.org/books/6823).

12. *Каринский А. Д.* Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. Учебное пособие (Лекции) [Электронный ресурс]. – М.: МГРИ-РГГРУ, 2014. - 203 с. http://mgri-rggru.ru/fondi/libraries/index.php?ELEMENT_ID=2656; http://magnetometry.ru/files/Karinskiy_lec_2014.pdf; http://www.geokniga.org/books/6822.

13. *Каринский А. Д.* Теория поля. Дополнительные главы: учебное пособие для специализации "сейсморазведка" [Электронный ресурс]. – М.: МГРИ-РГГРУ, 2018. - 104 с. http://mgri-rggru.ru/fondi/libraries/index.php?ELEMENT_ID=4823; http://magnetometry.ru/files/Karinskiy_uch_2018.pdf.

14. *Кауфман А. А.* Введение в теорию геофизических методов. Часть 1. Гравитационные, электрические и магнитные поля. - М.: Недра, 1997.

15. *Корн Г. и Корн Е.* Справочник по математике /изд. 2-е. - М.: Наука, 1970.

16. *Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. - М.: Наука, 1965.

17. *Марков Г. Т., Чаплин А. Ф.* Возбуждение электромагнитных волн. - М.: Радио и связь, 1983.

18. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 1. - М.: Изд-во Иностранная литература, 1958.

19. *Никольский В. В.* Электродинамика и распространение радиоволн. - М.: Наука, 1973.

20. *Овчинников И. К.* Теория поля. - М.: Недра, 1979.

21. *Саваренский Е. Ф.* Сейсмические волны. - М.: Недра, 1972.

22. *Сретенский Л. Н.* Теория ньютоновского потенциала. - М.: Гостехиздат, 1946.

23. *Стрэттон Дж. А.* Теория электромагнетизма. - М.: Гостехиздат, 1948.

24. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. - М.: Наука, 1976.

25. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1977.